

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «**Теория колебаний**»

по направлению подготовки

23.05.01 «Наземные транспортно-

технологические средства»

очной (очно-заочной, заочной) форм обучения

Ростов-на-Дону  
2024-2025

## Вводные замечания

Среди различных сил, которые могут действовать на материальную точку, особое место занимают *восстанавливающие силы*, т. е. силы, стремящиеся вернуть точку в положение равновесия. Такие силы зависят от отклонения точки от положения равновесия и направлены к положению равновесия.

Как мы увидим ниже, восстанавливающие силы придают движению материальной точки *колебательный характер*. Природа этих сил весьма разнообразна. Три случая показаны на рис. 2.1.

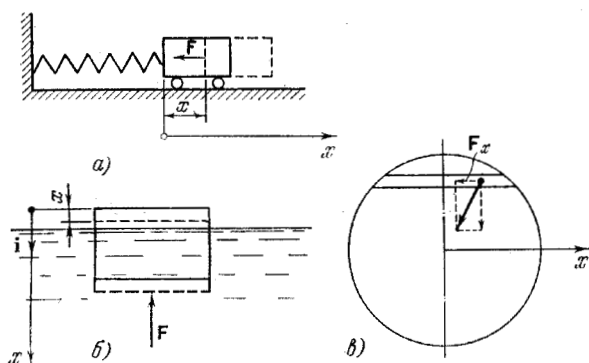


Рис. 2.1

В первом случае (рис. 2.1, а) восстанавливающая сила обусловлена упругими свойствами пружины и возникает вследствие деформации пружины. Во втором случае (рис. 2.1, б) при вертикальных отклонениях плавающего понтона от положения равновесия возникает дополнительная (архимедова) сила, также направленная против отклонения и играющая роль восстанавливающей силы. В третьем случае (рис. 2.1, в) имеется в виду материальная точка, находящаяся в прямолинейном сквозном канале, который проходит внутри Земли. Если тело отклонено от положения равновесия, возникает составляющая силы притяжения, направленная к положению равновесия.

Однако, кроме восстанавливающих сил, в подобных случаях одновременно действуют, как правило, также *силы сопротивления*  $R(\dot{x})$ , зависящие от скорости движения; таково в схеме рис. 2.1, а трение между телом и горизонтальной поверхностью, в схеме

рис. 2.1, б — зависящее от скорости сопротивление воды, в схеме рис. 2.1, в — сопротивление воздуха и трение скольжения. Наконец, возможно, что к материальной точке приложена *возмущающая сила*, т. е. сила, являющаяся заданной функцией времени.

Настоящая глава посвящена систематическому исследованию всех вариантов сочетания указанных сил в случае прямолинейного движения материальной точки. Хотя эта задача представляет практический интерес и сама по себе, но еще более важно, что ее решение можно почти без всяких изменений использовать для многих других случаев колебаний.

Дело в том, что различные по своему физическому содержанию колебательные явления описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, поэтому выводы, полученные при изучении колебательного движения в какой-либо одной области, могут быть использованы и в других областях.

Т а б л и ц а 1

Действующие силы	Дифференциальное уравнение	Наименование вида колебаний
Восстанавливающая сила $F(x)$ : $F_x = -cx$	$m\ddot{x} + cx = 0$	Свободные колебания
Восстанавливающая сила $F(x)$ + сила сопротивления $R(\dot{x})$ : $F_x = -cx, R_x = -b\dot{x}$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$	Свободные колебания при наличии вязкого трения
Восстанавливающая сила $F(x)$ + возмущающая сила $Q(t)$ : $F_x = -cx, Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + cx = Q_x(t)$	Вынужденные колебания
Восстанавливающая сила $F(x)$ + сила сопротивления $R(\dot{x})$ + возмущающая сила $Q(t)$ : $F_x = -cx, R_x(\dot{x}) = -b\dot{x},$ $Q_x = Q_x(t)$	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q_x(t)$	Вынужденные колебания при наличии вязкого трения

Наиболее просты для исследования те случаи колебательных движений, когда восстанавливающая сила пропорциональна отклонению точки от положения равновесия, а сила сопротивления пропорциональна скорости точки. Соответственно проекции восстанавливающей силы и силы сопротивления на ось  $x$  имеют вид

$$F_x = -cx, \quad R_x = -b\dot{x}.$$

В этих случаях дифференциальные уравнения движения *линейны*; соответственно такие колебания также называются *линейными* \*).

В зависимости от того, какая комбинация сил действует на материальную точку, колебательное движение приобретает те или иные типичные особенности. В таблице 1 дана сводка различных изучаемых в дальнейшем типов линейных колебаний.

Возможны и более сложные случаи, когда сила зависит одновременно от координаты  $x$  и времени  $t$  и не может быть представлена в виде суммы  $F_x(x)$  и  $Q_x(t)$ , а также когда сила зависит от координаты  $x$  и скорости  $\dot{x}$ , причем силу нельзя представить как сумму  $F(x)$  и  $R(\dot{x})$ . Эти случаи здесь не рассматриваются.

## § 2.2. Свободные колебания

Рассматриваемая задача характеризуется тем, что на материальную точку действует только *восстанавливающая сила*; в линейных задачах ее модуль пропорционален отклонению точки от положения равновесия. Проекция восстанавливающей силы на ось  $x$  равна

$$F_x = -cx, \quad (2.1)$$

где  $c$  — коэффициент пропорциональности, а дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Положив  $c/m = k^2$ , получим

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, движение материальной точки под действием восстанавливающей силы описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\alpha^2 + k^2 = 0.$$

Так как его корни — чисто мнимые числа:  $\alpha_1 = ki$ ,  $\alpha_2 = -ki$ , то общим решением дифференциального уравнения (2.2) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2.3)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования.

Для большего удобства анализа этого решения введем новые постоянные интегрирования  $a$  и  $\varepsilon$ , положив

$$C_1 = a \sin \varepsilon, \quad C_2 = a \cos \varepsilon.$$

Это можно сделать, так как из этих соотношений постоянные  $a$  и  $\varepsilon$  определяются через  $C_1$  и  $C_2$  с помощью формул

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = C_1/C_2.$$

\*) Термин «линейные колебания» никак не связан с прямолинейностью траектории точки и определяется исключительно линейностью дифференциальных уравнений.

Тогда

$$x = a \cos \varepsilon \sin kt + a \sin \varepsilon \cos kt,$$

или

$$x = a \sin (kt + \varepsilon). \quad (2.4)$$

Постоянные  $a$  и  $\varepsilon$  (или постоянные  $C_1$  и  $C_2$ ) определяются заданными начальными условиями — начальным положением и начальной скоростью движущейся точки.

Таким образом, под действием восстанавливающей силы материальная точка совершает движение по синусоидальному закону, т. е. гармоническое колебательное движение. Такие колебания называются *свободными колебаниями*.

Из уравнения (2.4) видно, что наибольшее отклонение материальной точки от положения равновесия (*амплитуда колебаний*) равно  $a$ .

Аргумент  $(kt + \varepsilon)$  называется *фазой колебаний*, а величина  $\varepsilon$  — *начальной фазой*.

Величина  $k$  называется *угловой частотой* колебаний и определяет число колебаний, совершаемых точкой за  $2\pi$  секунд. В дальнейшем величину  $k$  для краткости будем называть просто *частотой*. Частота колебаний  $k$  не зависит от начальных условий и определяется только параметрами системы (величинами  $c$  и  $m$ ). По этому признаку частоту свободных колебаний называют также *собственной частотой*.

Для определения амплитуды и начальной фазы колебаний воспользуемся *начальными условиями*, которые должны быть заданы (в противном случае колебательный процесс не полностью определен). Пусть в начальный момент  $t = 0$  известны начальное положение материальной точки  $x = x_0$  и начальная скорость  $\dot{x} = \dot{x}_0$ . Тогда, подставив в уравнение движения (2.4) и в выражение для скорости

$$\dot{x} = ak \cos (kt + \varepsilon) \quad (2.5)$$

$t = 0$ ,  $x = x_0$  и  $\dot{x} = \dot{x}_0$ , получим для определения  $a$  и  $\varepsilon$  два уравнения:

$$x_0 = a \sin \varepsilon, \quad \dot{x}_0 = ak \cos \varepsilon.$$

Отсюда находим

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} \quad (2.6)$$

---

\*) Если  $x_0 > 0$ , то при  $\frac{x_0}{\dot{x}_0} > 0$   $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$ , а при  $\frac{x_0}{\dot{x}_0} < 0$   $\frac{\pi}{2} \leq \varepsilon \leq \pi$ .

Если  $x_0 < 0$ , то при  $\frac{x_0}{\dot{x}_0} > 0$   $\pi \leq \varepsilon \leq \frac{3\pi}{2}$ , а при  $\frac{x_0}{\dot{x}_0} < 0$   $\frac{3\pi}{2} \leq \varepsilon \leq 2\pi$ .

и поэтому закон движения точки определяется следующим уравнением:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \sin \left( kt + \arctg \frac{kx_0}{\dot{x}_0} \right). \quad (2.7)$$

График свободных колебаний материальной точки представлен на рис. 2.2; здесь отмечены начальное отклонение  $x_0$ , амплитуда колебаний  $a$ , а также промежуток времени  $T$ , в течение которого происходит одно полное колебание. Этот наименьший промежуток времени, по истечении которого движение точки полностью повторяется, называется *периодом колебаний*. Зависимость между периодом колебаний и частотой определится из условия периодичности движения:

$$k(t + T) + \varepsilon = kt + \varepsilon + 2\pi,$$

откуда  $T = 2\pi/k$ , или

$$T = 2\pi \sqrt{m/c}. \quad (2.8)$$

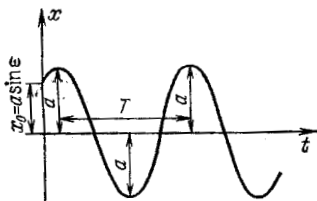


Рис. 2.2

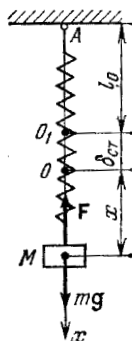


Рис. 2.3

Таким образом, период колебаний, так же как и частота, не зависит от начальных условий. Это свойство колебаний называется *изохронностью*. Как видно из (2.8), период и частота колебаний определяются величиной колеблющейся массы  $m$  и коэффициентом пропорциональности  $c$ , причем с увеличением массы и уменьшением коэффициента  $c$  период колебаний увеличивается.

**Задача 2.1.** Груз массы  $m$  подвешен на пружине, массой которой можно пренебречь (рис. 2.3). На колеблющийся груз действуют две силы: сила тяжести  $mg$  и сила упругости  $F$ , создаваемая пружиной. Составить дифференциальное уравнение движения.

Отметим на рис. 2.3 три положения:  $O_1$  — положение нижнего конца пружины в ее недеформированном состоянии ( $l_0$  — длина пружины в недеформированном состоянии),  $O$  — положение равновесия груза, висящего на пружине,  $M$  — текущее положение груза при его движении. Обозначим расстояние  $O_1O$  через  $\delta_{ст}$  (статическая деформация пружины) и направим ось  $x$  вертикально вниз, выбрав начало отсчета в положении равновесия груза (точка  $O$ ).

По закону Гука при относительно небольших перемещениях модуль силы упругости пропорционален деформации пружины. В нашем случае деформация пружины равна  $|\delta_{ст} + x|$ , поэтому  $F = c|\delta_{ст} + x|$ , где  $c$  — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом жесткости* пружины. Очевидно, что коэффициент жесткости численно равен силе, которую нужно приложить к концу

пружины, чтобы деформировать ее на единицу длины. Проекция силы  $F$  на ось  $x$  равна  $-c(\delta_{\text{ст}} + x)$ . Дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{\text{ст}} + x).$$

Если груз находится в равновесии, то сила тяжести  $mg$  уравновешивается силой упругости, которая в положении равновесия равна  $c\delta_{\text{ст}}$  (так как в этом случае  $x = 0$ ). Следовательно,

$$mg = c\delta_{\text{ст}}. \quad (2.9)$$

Принимая это во внимание, приведем дифференциальное уравнение движения груза к виду

$$m\ddot{x} = -cx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2x = 0,$$

где  $k^2 = c/m$ .

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с уравнением (2.2). Поэтому груз, подвешенный к пружине, совершает гармонические колебания с частотой  $k$ .

Если начало координат взять в точке  $O_1$  или в верхнем неподвижном конце  $A$  пружины, то дифференциальное уравнение движения усложнится. Так, если начало координат выбрано в точке  $O_1$ , то  $F_x = -cx$ , и уравнение движения груза примет вид

$$m\ddot{x} = mg - cx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2x = g.$$

Если начало координат выбрать в неподвижном конце  $A$  пружины, то  $F_x = -c(x - l_0)$ , где  $l_0$  — длина пружины в недеформированном состоянии. Дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x} = mg - c(x - l_0)$$

после упрощения приводится к форме

$$\ddot{x} + k^2x = g + k^2l_0.$$

Таким образом, рациональным выбором начала отсчета можно упростить форму дифференциального уравнения движения и, следовательно, его решение.

**Задача 2.2.** На понтон (рис. 2.1, б) действует его сила тяжести  $G$  и архимедова выталкивающая сила  $F$ . Исследовать вертикальную качку понтона.

В состоянии равновесия сила тяжести понтона  $G$  уравновешивается архимедовой силой  $F$ . Если это состояние по какой-либо причине нарушается и понтон дополнительно погрузится в воду, то согласно закону Архимеда выталкивающая сила возрастет, т. е. получит приращение, направленное вверх. Понятно, что при любых отклонениях понтона от положения равновесия приращение силы  $F$  будет направлено против отклонения. Если понтон прямостенный (в первом приближении это можно принять), то приращение архимедовой силы пропорционально отклонению  $x$  и определяется соотношением

$$\Delta F = -\gamma S x,$$

где  $\gamma$  — удельный вес воды,  $S$  — площадь, ограниченная ватерлинией (площадь сечения понтона горизонтальной плоскостью на уровне поверхности воды). Действительно, произведение  $Sx$  определяет дополнительно вытесненный объем воды, так что произведение  $\gamma Sx$  равно «потере веса» по закону Архимеда, т. е. приращению модуля силы  $F$ .

Допустим, что после нарушения состояния равновесия понтон будет предоставлен самому себе. В любой момент последующего движения на понтон действуют две силы: сила тяжести  $G = mg$  (направленная вниз) и архимедова сила  $F + \Delta F$  (направленная вверх). Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось  $x$  имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - F - \gamma Sx.$$

учитывая, что  $mg = F$ , найдем

$$m\ddot{x} + \gamma Sx = 0, \quad \text{т. е.} \quad \ddot{x} + \frac{\gamma S}{m}x = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение совпадает с подробно исследованным уравнением (2.2). Поэтому, независимо от начальных условий, можно сразу найти период (2.8) вертикальной качки понтона:

$$T = 2\pi \sqrt{m/(\gamma S)}.$$

Пусть, например, площадь, ограниченная ватерлинией понтона, равна  $20 \text{ м}^2$  и его сила тяжести составляет 30 тс. Тогда находим ( $\gamma = 1 \text{ тс/м}^3$ ,  $m = \frac{30}{9,8} \text{ тс} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ )

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{30 \cdot 000}{9,8 \cdot 1000 \cdot 20}} = 2,5 \text{ с}.$$

Приведенное решение грубо приближенное, так как выталкивающая сила определялась по закону Архимеда, справедливому лишь для условий покоя. В данном случае следовало бы рассмотреть более сложные явления гидродинамического характера, связанные с движением воды при качке. Как показывают более подробные исследования, эти дополнительные обстоятельства можно учесть, условно добавляя некоторую массу воды («присоединенную массу») к массе понтона.

В заключение рассмотрим еще одну задачу.

**Задача 2.3.** Для определения коэффициента сухого трения может быть использована установка, изображенная на рис. 2.4. Она состоит из двух валов, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями в разные стороны, на которые кладется пластина. При совпадении центра тяжести пластины  $C$  с серединой расстояния между осями (точкой  $O$ ) пластина находится в равновесии под действием равных и противоположно направленных сил трения  $F_A$  и  $F_B$ . Исследовать движение пластины, если в начальный момент ее равновесие было нарушено.

Если каким-либо способом нарушить состояние равновесия пластины, то она придет в движение в горизонтальной плоскости. Вследствие смещения центра тяжести  $C$  давления на диски окажутся неодинаковыми. Соответственно нарушится равенство сил трения, причем равнодействующая сил трения окажется направленной к точке  $O$ , т. е. в сторону положения равновесия, и будет восстанавливающей силой. Благодаря действию этой силы возникает процесс свободных колебаний, период которых зависит от свойств трения между пластиной и валами. Это позволяет по опытным значениям периода колебаний определить коэффициент трения  $f$ .

Для вывода соответствующей формулы составим дифференциальное уравнение горизонтальных колебаний пластины. Вдоль оси  $x$  действуют сила трения, приложенная в точке  $A$ , равная  $fN_A$  и направленная вправо, и сила трения, приложенная в точке  $B$ , равная  $fN_B$  и направленная влево. Если центр тяжести пластины смещен от положения равновесия на величину  $x$ , то

$$N_A = \frac{l-x}{2l} Q, \quad N_B = \frac{l+x}{2l} Q,$$

где  $Q$  — сила тяжести пластины,  $2l$  — расстояние между осями валов \*).

Дифференциальное уравнение движения пластины имеет вид

$$m\ddot{x} = f \frac{l-x}{2l} Q - f \frac{l+x}{2l} Q.$$

\*) Здесь мы, в сущности, использовали уравнение статики. Уравновешенность сил, направленных перпендикулярно к оси  $Ox$ , следует из того, что ускорение пластины в этом направлении равно нулю.

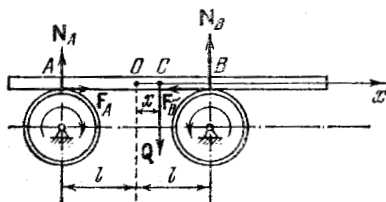


Рис. 2.4



Положив  $fg/l = k^2$ , получим

$$\ddot{x} + k^2 x = 0;$$

отсюда сразу следует, что период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{l/(fg)}.$$

Разрешая последнее уравнение относительно  $f$ , получим окончательную формулу

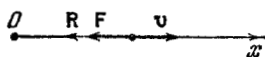
$$f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2}.$$

Определив из опыта период колебаний  $T$  и зная расстояние между осями колес  $2l$ , найдем отсюда коэффициент трения скольжения.

### § 2.3. Свободные колебания при линейно-вязком сопротивлении

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы и линейной силы сопротивления. Совместим начало координат с положением равновесия точки. Проекция восстанавливающей силы  $F$  на ось  $x$  равна  $-cx$ . Так как сила сопротивления  $R$  всегда направлена в сторону, противоположную направлению скорости точки, то проекция силы сопротивления на ось  $x$  равна  $-b\dot{x}$ , где  $b$  — коэффициент пропорциональности, характеризующий сопротивление среды (рис. 2.5).

Таким образом, дифференциальное уравнение движения точки запишется следующим образом:



$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x}. \quad (2.10)$$

Вводя обозначения  $c/m = k^2$ ,  $b/m = 2h$ , получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0. \quad (2.11)$$

Рис. 2.5

Это — линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид  $\alpha^2 + 2h\alpha + k^2 = 0$ , и его корни равны

$$\alpha_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}, \quad \alpha_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Характер движения точки существенно зависит от соотношения величин  $h$  и  $k$ .

Если  $h < k$  (случай малого сопротивления), то корни характеристического уравнения комплексно сопряженные. Если  $h \geq k$  (случай большого сопротивления), то корни вещественные. Рассмотрим подробно каждый из этих случаев.

1. Случай малого сопротивления ( $h < k$ ). Корни характеристического уравнения будут

$$\alpha_1 = -h + i\sqrt{k^2 - h^2}, \quad \alpha_2 = -h - i\sqrt{k^2 - h^2}.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = e^{-ht} (C_1 \sin k^*t + C_2 \cos k^*t), \quad (2.12)$$

где  $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования.

Для большей наглядности введем новые постоянные  $a$ ,  $\varepsilon$  при помощи формул  $C_1 = a \cos \varepsilon$ ,  $C_2 = a \sin \varepsilon$ . Тогда получим

$$x = ae^{-ht} \sin (k^*t + \varepsilon). \quad (2.13)$$

Из этого уравнения видно, что  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (так как  $e^{-ht} \rightarrow 0$ ), т. е. движение является *затухающим*. Это затухающее движение

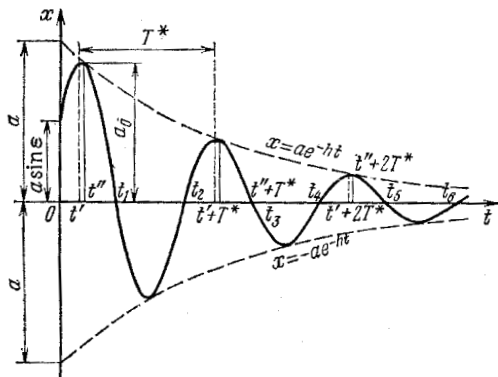


Рис. 2.6

носит колебательный характер, так как, приближаясь (при  $t \rightarrow \infty$ ) к состоянию равновесия, система будет проходить через это состояние бесконечное число раз в моменты времени, равные

$$t_n = \frac{n\pi - \varepsilon}{k^*},$$

где  $n = 1, 2, \dots$  (рис. 2.6).

Движение, описываемое формулой (2.13), не является периодическим, так как с течением времени последовательные максимальные отклонения точки от положения равновесия уменьшаются. Важно, что максимальные отклонения точки от положения равновесия хотя и уменьшаются с течением времени, но промежуток времени между двумя любыми последующими отклонениями (например, в сторону положительного направления оси  $x$ ) есть постоянная величина, равная  $2\pi/k^*$ . Эту величину условно называют *периодом затухающих колебаний*.

Рассмотрим подробнее график движения (см. рис. 2.6). На этом рисунке кривые  $x = ae^{-ht}$  и  $x = -ae^{-ht}$  являются границами области, внутри которой располагается график движения.

Вычислим моменты времени, соответствующие максимальным отклонениям точки от положения равновесия. С этой целью найдем скорость точки

$$\dot{x} = -hae^{-ht} \sin(k^*t + \varepsilon) + ak^*e^{-ht} \cos(k^*t + \varepsilon) \quad (2.14)$$

и приравняем ее нулю. Будем иметь

$$\operatorname{tg}(k^*t + \varepsilon) = k^*/h.$$

Отсюда следует, что если  $t'$  (наименьший корень полученного уравнения) соответствует первому максимальному отклонению в положительном направлении оси  $x$ , то последующие максимальные отклонения в положительном направлении оси  $x$  будут достигаться в следующие моменты времени:  $t'_n = t' + (n-1)T^*$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , а

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}. \quad (2.15)$$

Из этой формулы видно, что при вязком трении период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний, равного  $2\pi/k$ . Максимальные отклонения  $a_0, a_1, \dots$ , соответствующие моментам времени  $t', t' + T^*, t' + 2T^*, \dots, t' + nT^*$ , равны

$$a_0 = ae^{-ht'} \sin(k^*t' + \varepsilon), \quad a_1 = ae^{-h(t'+T^*)} \sin(k^*t' + \varepsilon), \dots,$$

$$a_n = ae^{-h(t'+nT^*)} \sin(k^*t' + \varepsilon), \dots;$$

при этом учтено, что

$$\begin{aligned} \sin[k^*(t' + mT^*) + \varepsilon] &= \\ &= \sin\left[k^*\left(t' + m\frac{2\pi}{k^*}\right) + \varepsilon\right] = \sin(k^*t' + \varepsilon + 2\pi m) = \sin(k^*t' + \varepsilon), \end{aligned}$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$

Из формул для  $a_0, a_1, \dots$  видно, что отношение последующего максимального отклонения вдоль положительного направления оси  $x$  к предыдущему постоянно и равно

$$\eta = \frac{a_m}{a_{m-1}} = e^{-hT^*}. \quad (2.16)$$

Таким образом, амплитуды затухающих колебаний при вязком сопротивлении убывают в геометрической прогрессии. Величина  $\eta$  (знаменатель геометрической прогрессии) называется *декрементом колебаний* (или *фактором затуханий*), а модуль натурального логарифма этой величины

$$\Lambda = hT^* \quad (2.17)$$

называется *логарифмическим декрементом колебаний* \*).

\*) Иногда вводят  $\eta = e^{-hT^*/2}$  и  $\Lambda = hT^*/2$ , т. е. сопоставляют два последовательных наибольших по модулю отклонения в разные стороны.

Заметим, что если  $t = t''$  является положительным корнем уравнения  $\sin(k^*t + \epsilon) = 1$ , то моменты времени, в которые график движения касается кривой  $ae^{-ht}$ , будут:  $t'', t'' + T^*, t'' + 2T^*, \dots$

Декремент колебаний можно определить как отношение отклонения при  $t = t'' + nT^*$  к отклонению при  $t = t'' + (n-1)T^*$ .

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия:  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  при  $t = 0$ .

Подставляя эти условия в равенства (2.13) и (2.14), получим уравнения для определения постоянных  $a$  и  $\epsilon$ :

$$x_0 = a \sin \epsilon, \quad \dot{x}_0 = -ha \sin \epsilon + ak^* \cos \epsilon,$$

откуда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{k^{*2}}}, \quad \operatorname{tg} \epsilon = \frac{k^* x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}.$$

**2. Граничный случай ( $h = k$ ).** Корни характеристического уравнения в этом случае будут вещественными и кратными:  $\alpha_1 = \alpha_2 = -h$ , и, следовательно, общее решение уравнения движения (2.11) имеет вид

$$x = e^{-ht} (C_1 + C_2 t), \quad (2.18)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Принимая во внимание, что  $\dot{x} = -he^{-ht} (C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-ht}$ , получим при начальных условиях:  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  при  $t = 0$  следующие уравнения для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ :  $x_0 = C_1$ ,  $\dot{x}_0 = -hC_1 + C_2$ . Отсюда  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = \dot{x}_0 + hx_0$ .

Таким образом, для заданных начальных условий уравнение движения точки запишется в виде

$$x = e^{-ht} [x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0) t]. \quad (2.19)$$

Из этой зависимости следует, что в рассматриваемом случае движение точки уже не носит колебательного характера, но остается затухающим движением, так как  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  \*).

Такое движение называется *апериодическим*.

Для построения графиков этого движения найдем момент времени, соответствующий максимальному отклонению точки от положения равновесия, и момент времени прохождения точки через положение равновесия.

Приравняв производную по времени от  $x$  нулю:

$$-h [x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0) t] + \dot{x}_0 + hx_0 = 0,$$

имеем

$$t_0 = \frac{\dot{x}_0}{h(\dot{x}_0 + hx_0)}.$$

\*) При  $t \rightarrow \infty$  множитель  $e^{-ht}$  стремится к нулю, а множитель, стоящий в квадратных скобках, стремится к бесконечности. Раскрывая неопределенность (например, по правилу Лопиталя), найдем, что  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Из условия  $x = 0$  получим

$$t_1 = -\frac{x_0}{\dot{x}_0 + h x_0}.$$

Для  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 > 0$  имеем  $t_2 > 0$ ,  $t_1 < 0$  и график движения имеет вид, показанный на рис. 2.7, а.

Если  $x_0 > 0$ , то при  $\dot{x}_0 \leq 0$  и  $|\dot{x}_0| < h x_0$  будет  $t_2 < 0$ ,  $t_1 < 0$ , т. е. экстремальных точек нет и график движения имеет вид, показанный на рис. 2.7, б; при  $\dot{x}_0 \leq 0$  и  $|\dot{x}_0| > h x_0$  получаем, что  $t_2 > 0$ ,  $t_1 > 0$ . Это значит, что точка, получив начальную скорость, пройдет в дальнейшем движении положение равновесия (при  $t = t_1$ ) и при  $t = t_2$  достигнет положения, соответствующего максимальному отклонению точки от положения равновесия. Далее точка будет асимптотически приближаться к положению равновесия. График движения для этого случая показан на рис. 2.7, в.

Отметим, что при  $x_0 < 0$  характер графиков не изменится.

3. Случай большого сопротивления ( $h > k$ ). В этом случае корни характеристического уравнения

$$\alpha_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}, \quad \alpha_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}$$

являются действительными и отрицательными. Общее решение уравнения движения (2.1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (2.20)$$

Так как  $\dot{x} = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}$ , то при начальных условиях:  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  при  $t = 0$  уравнения для определения постоянных интегрирования будут  $x_0 = C_1 + C_2$ ,  $\dot{x}_0 = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$ . Найдя отсюда

$$C_1 = \frac{\alpha_2 x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

и подставив эти  $C_1$  и  $C_2$  в выражение (2.20), получим

$$x = \frac{\alpha_2 x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_2 t}. \quad (2.21)$$

Это уравнение описывает аperiодическое затухающее движение ( $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , так как  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  отрицательны).

Продифференцировав выражение (2.21) по времени и приравняв полученный результат нулю, получим значение  $t = t_2$ , соответствующее максимальному отклонению точки от положения равновесия:

$$t_2 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{\alpha_2 (\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0)}{\alpha_1 (\dot{x}_0 - \alpha_2 x_0)}.$$

Принимая во внимание, что  $\alpha_1 \alpha_2 = k^2$  и  $\alpha_2 - \alpha_1 = -2 \sqrt{h^2 - k^2}$ , это выражение можно переписать в виде

$$t_2 = \frac{1}{2 \sqrt{h^2 - k^2}} \ln \left[ 1 + \frac{2 \sqrt{h^2 - k^2} |\alpha_2| \dot{x}_0}{k^2 (\dot{x}_0 + |\alpha_2| x_0)} \right].$$

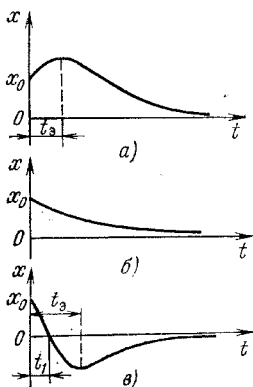


Рис. 2.7

Очевидно, что  $t_0$  будет больше нуля для тех значений  $x_0$  и  $\dot{x}_0$ , для которых

$$\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0 + |\alpha_2| x_0} > 0.$$

Момент времени  $t_1$ , в который координата  $x$ , определяемая формулой (2.21), обращается в нуль, найдем по формуле

$$t_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{\dot{x}_0 - \alpha_1 x_0}{\dot{x}_0 - \alpha_2 x_0} = \frac{1}{2\sqrt{h^2 - k^2}} \ln \left[ 1 - \frac{2\sqrt{h^2 - k^2} x_0}{\dot{x}_0 + |\alpha_2| x_0} \right].$$

Отсюда следует, что  $t_1$  будет больше нуля при

$$\frac{x_0}{\dot{x}_0 + |\alpha_2| x_0} < 0.$$

Виды графиков движения для рассматриваемого случая ( $h > k$ ) представлены соответственно

- для  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 > 0$  на рис. 2.7, а;
- для  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 \leq 0$ , но  $|\dot{x}_0| < |\alpha_2| x_0$  на рис. 2.7, б;
- для  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 < 0$ , но  $|\dot{x}_0| > |\alpha_2| x_0$  на рис. 2.7, в.

**Задача 2.4.** При наблюдении колебаний груза массы 3 кг по виброграмме \*) было установлено, что «огнбающая» графика затухающих колебаний имеет вид графика показательной функции (экспоненты), причем за один период амплитуда колебаний уменьшается вдвое. По той же виброграмме определено, что период колебаний равен 0,3 с. Определить коэффициент жесткости пружины и коэффициент  $h$  силы вязкого сопротивления.

Для решения задачи используем следующие соотношения:

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}, \quad \frac{a_{m-1}}{a_m} = e^{hT^*}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Подставив в эти формулы числовые данные, получим

$$\frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} = 0,3, \quad e^{0,3h} = 2, \quad k = \sqrt{\frac{c}{3}}.$$

Решая эти уравнения относительно  $c$ ,  $h$  и  $k$ , находим  $h = 2,31 \text{ с}^{-1}$ ,  $k = 21,1 \text{ с}^{-1}$ ,  $c = 13,36 \text{ Н/см}$ .

**Задача 2.5.** Пользуясь данными предыдущей задачи, определить, во сколько раз следует уменьшить массу груза, чтобы свободное движение системы стало аperiodическим.

Пусть  $m_1$  — новая масса, тогда, вводя обозначение  $\lambda = m/m_1$ , будем иметь

$$h_1 = \frac{b}{2m_1} = \frac{b\lambda}{2m} \quad \text{и} \quad k_1 = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{c\lambda}{m}}.$$

Условия задачи будут удовлетворены, если  $h_1 = k_1$ , т. е.

$$\frac{b\lambda}{2m} = \sqrt{\frac{c\lambda}{m}}, \quad \text{или} \quad h\lambda = k\sqrt{\lambda}.$$

Используя данные предыдущей задачи, получим, что массу следует уменьшить в

$$\lambda = \left( \frac{k}{h} \right)^2 = \left( \frac{21,1}{2,31} \right)^2 \approx 83 \text{ раза}.$$

\*) Виброграммой (или осциллограммой) называется полученный в эксперименте график колебаний.

**Задача 2.6.** Материальная точка совершает затухающие колебания под действием линейной восстанавливающей силы и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, причем постоянная  $h = b/(2m)$  составляет одну десятую от частоты  $k$  незатухающих колебаний ( $h/k = 0,1$ ). Определить разность между периодами затухающих  $T^*$  и незатухающих  $T$  колебаний, а также во сколько раз уменьшится амплитуда затухающих колебаний через восемь полных колебаний.

Составим отношение периодов колебаний

$$\frac{T^*}{T} = \frac{2\pi/\sqrt{k^2 - h^2}}{2\pi/k} = \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right)^{-1/2}.$$

Так как по условию задачи число  $h/k$  мало, то, пользуясь хорошо известной приближенной формулой  $(1+x)^2 \approx 1 + \alpha x$ , справедливой при малых значениях  $|x|$  и любых  $\alpha$ , получим с достаточно хорошей точностью

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{k^2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T^* - T}{T} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{k^2}.$$

Следовательно, период затухающих колебаний  $T^*$  превышает период незатухающих колебаний  $T$  всего на 0,005 = 0,5 % (по условию задачи  $h/k = 0,1$ ).

Рассмотрим теперь ряд последовательных амплитуд затухающих колебаний:  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Так как эти амплитуды убывают по закону геометрической прогрессии, то

$$a_n = a_0 \eta^n,$$

где  $\eta$  — декремент колебаний, определяемый формулой (2.16). Отсюда

$$c_0/a_n = e^{hT^*n}.$$

Заменяв период затухающих колебаний  $T^*$  на его приближенное значение  $T = 2\pi/k$ , получим

$$a_0/a_n = e^{2\pi h n/k}.$$

Внеся сюда  $n = 8$  и  $h/k = 0,1$ , найдем

$$a_0/a_n \approx 152.$$

Таким образом, при относительно небольшом значении сил сопротивления ( $h/k = 0,1$ ) период затухающих колебаний мало отличается от периода незатухающих колебаний, но колебания гасятся весьма интенсивно — через восемь колебаний амплитуда уменьшается в 152 раза, т. е. колебания практически прекращаются.

## § 2.4. Свободные колебания при трении скольжения

Для простоты рассуждений рассмотрим движение прикрепленного к пружине тела массы  $m$  по шероховатой горизонтальной плоскости. Совместим начало координат с точкой, соответствующей положению тела при недеформированном состоянии пружины (рис. 2.8).

Дифференциальное уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x + T_x,$$

где  $F_x = -cx$  — проекция на ось  $x$  силы, действующей на точку со стороны пружины ( $c$  — коэффициент жесткости пружины),  $T_x$  — проекция на ось  $x$  силы сухого трения. Сила сухого трения направлена в сторону, противоположную направлению скорости тела, и по модулю равна  $fN = fmg$ , где  $f$  — коэффициент трения.

Таким образом, окончательно дифференциальное уравнение движения тела распадается на два знакомых нам линейных уравнения:

$$m\ddot{x} = -cx + fmg \quad (\dot{x} < 0),$$

$$m\ddot{x} = -cx - fmg \quad (\dot{x} > 0),$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = fg \quad (\dot{x} < 0), \quad (2.22)$$

$$\ddot{x} + k^2 x = -fg \quad (\dot{x} > 0), \quad (2.23)$$

где по-прежнему  $k^2 = c/m$ .

Допустим, что груз смещен от исходного положения вправо на расстояние  $x_0 = a_0$  и затем свободно, без начальной скорости, отпущен. Тогда движение начнется при следующих условиях:  $x = a_0 > 0$ ,  $\dot{x} = 0$  при  $t = 0$ . Предполагается, что в указанном смещенном положении восстанавливающая сила больше силы трения, т. е.  $ca_0 > fmg$ , или  $a_0 > fg/k^2$ . При нарушении этого условия движение не начнется. Для интегрирования уравнения (2.22) введем новую переменную  $\xi = x - fg/k^2$ . Тогда

$$\ddot{\xi} + k^2 \xi = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = a \sin(kt + \varepsilon),$$

т. е.

$$x = a \sin(kt + \varepsilon) + fg/k^2, \quad (2.24)$$

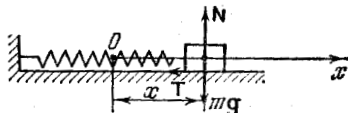


Рис. 2.8

где  $a$  и  $\varepsilon$  — постоянные интегрирования. Для их определения воспользуемся начальными условиями; получим  $a = a_0 - fg/k^2$ ,  $\varepsilon = \pi/2$ . Следовательно, груз будет двигаться по закону

$$x = \left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right) \cos kt + \frac{fg}{k^2}. \quad (2.25)$$

Однако это справедливо лишь до тех пор, пока скорость

$$\dot{x} = -\left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right) k \sin kt \quad (2.26)$$

остается отрицательной, т. е. до момента  $t_1 = \pi/k$ .При этом значение  $x$ , соответствующее крайнему левому положению, равно

$$x = x_1 = \frac{fg}{k^2} - \left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right) = -\left(a_0 - \frac{2fg}{k^2}\right).$$

Амплитуда  $a_1 = -x_1$  первого отклонения влево определяется равенством  $a_1 = a_0 - 2fg/k^2$ . В рассмотренном интервале времени тело совершит половину колебательного цикла относительно среднего положения  $fg/k^2$ .

Дальнейшее (обратное) движение возможно, если  $a_1 > fg/k^2$ . Допустим, что это условие соблюдается; тогда начнется движение вправо при новых начальных условиях  $x = x_1 = -a_1$ ,  $\dot{x} = 0$  при  $t = 0$ . Дифференциальное уравнение движения на этом участке имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = -fg. \quad (2.27)$$

Решение дифференциального уравнения (2.27) при указанных начальных условиях запишется следующим образом:

$$x = -\left(a_1 - \frac{fg}{k^2}\right) \cos kt - \frac{fg}{k^2}, \quad \dot{x} = \left(a_1 - \frac{fg}{k^2}\right) k \sin kt \quad (\dot{x} > 0). \quad (2.28)$$

В конце второго участка движения  $\dot{x} = 0$ , откуда следует, что промежуток времени, в течение которого происходит движение во втором этапе, равен  $t_2 = \pi/k$ , т. е.  $t_2 = t_1$ .

Подставляя значение  $t = t_2$  в уравнение (2.28), получим наибольшее отклонение в конце второго этапа:  $a_2 = a_1 - 2fg/k^2$ . Если при этом  $a_2 > fg/k^2$ , то вновь начнется движение влево. Здесь нужно снова обратиться к дифференциальному уравнению (2.22) и решать его при следующих начальных условиях:  $x = a_2$ ,  $\dot{x} = 0$  при  $t = 0$ .



Понятно, что при этом вновь приходим к уравнениям (2.24)–(2.26), в которых  $a_0$  следует заменить на  $a_2$ . Легко заметить, что на каждый полупериод максимальное отклонение тела от начала координат уменьшается на величину, равную  $2fg/k^2$ , причем длительность каждого полупериода равна  $\pi/k$ .

Имея в виду сказанное, можно записать следующую последовательность максимальных отклонений через каждый полупериод:

$$a_1 = a_0 - \frac{2fg}{k^2}, \quad a_2 = a_1 - \frac{2fg}{k^2}, \quad a_3 = a_2 - \frac{2fg}{k^2}, \dots, \quad a_n = a_{n-1} - \frac{2fg}{k^2}.$$

Складывая почленно все равенства, найдем

$$a_n = a_0 - 2fgn/k^2.$$

Таким образом, при сухом трении последовательные амплитуды колебаний убывают по закону *арифметической* прогрессии, разность которой равна  $2fg/k^2$ ; период затухающих колебаний при сухом трении равен периоду незатухающих колебаний  $2\pi/k$ . Напомним, что при вязком трении амплитуды колебаний убывают по геометрической прогрессии, а период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний.

Колебания будут происходить до тех пор, пока сила упругости  $ca_n$  в одном из крайних положений не сделается меньше силы трения  $fmg$ :  $ca_n < fmg$ , или  $a_n < fg/k^2$ . Пользуясь выражением для  $a_n$ , получим

$$a_0 = x_0 < (2n+1) fg/k^2.$$

Это неравенство может служить для определения числа полуколебаний до остановки груза, или начального отклонения  $x_0$  по известному числу полуколебаний  $n$ .

На рис. 2.9 построен график колебаний. Параллельно оси времени проведены две прямые:  $x = fg/k^2 = b$  и  $x = -fg/k^2 = -b$ . Около верхней прямой располагаются косинусоиды, соответствующие движению влево (нечетные полупериоды), а около нижней прямой — косинусоиды, соответствующие движению вправо (четные полупериоды). Если какой-либо полупериод заканчивается в полосе, расположенной между двумя прямыми, то движение прекращается: эта полоса называется *зоной застоя*. «Огибающие» графика движения имеют вид наклонных прямых.

**Задача 2.7.** В системе, изображенной на рис. 2.8, коэффициент жесткости пружины  $c = 1962$  Н/м, масса груза 3 кг и коэффициент сухого трения  $f = 0,1$ . Какому условию должно удовлетворять начальное отклонение  $x_0$  груза, чтобы до полной остановки он совершил не более 10 полных колебаний?

По условию задачи должно выполняться неравенство

$$x_0 < (2n+1) fg/k^2,$$

где  $n$  — число полупериодов. Подставляя сюда  $n = 20$ ,  $k^2 = c/m = 1962/3 = 654$  с<sup>-2</sup>, получаем

$$x_0 < \frac{41fg}{k^2} = \frac{41 \cdot 0,1 \cdot 981}{654} = 6,15 \text{ см.}$$

## § 2.5. Вынужденные колебания

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки под действием восстанавливающей силы и внешней возмущающей силы. Возмущающая сила может быть произвольной функцией времени,

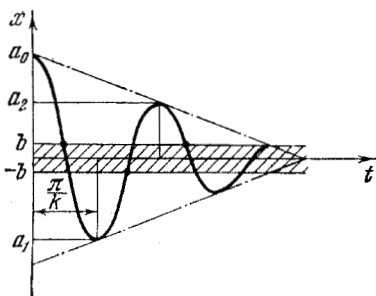


Рис. 2.9

однако мы ограничимся простейшим, но практически весьма важным случаем, когда сила изменяется по гармоническому закону. Пусть проекция возмущающей силы на ось  $x$  равна  $H \sin(pt + \delta)$ , где  $H$  — амплитуда и  $p$  — частота возмущающей силы,  $\delta$  — начальная фаза. Тогда дифференциальное уравнение движения материальной точки вдоль оси  $x$  имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta),$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = H_0 \sin(pt + \delta), \quad (2.29)$$

где

$$k^2 = c/m, \quad H_0 = H/m.$$

Решив дифференциальное уравнение (2.29), мы определим закон движения материальной точки. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.29) равно сумме решений: частного решения уравнения (2.29) и общего решения однородного уравнения

$$\ddot{x} + k^2x = 0.$$

Общее решение последнего уравнения мы уже знаем:

$$x_1 = a \sin(kt + \varepsilon),$$

где  $a$  и  $\varepsilon$  — постоянные интегрирования. Если  $p \neq k$ , то частное решение уравнения (2.29) будем искать в виде

$$x_2 = A^* \sin(pt + \delta),$$

где  $A^*$  — неизвестная постоянная. Для ее определения подставим выражения  $x_2$  и  $\ddot{x}_2 = -A^*p^2 \sin(pt + \delta)$  в уравнение (2.29):

$$-A^*p^2 \sin(pt + \delta) + A^*k^2 \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta),$$

или

$$A^*(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta).$$

Для тождественного выполнения этого равенства должно быть

$$A^* = \frac{H_0}{k^2 - p^2}.$$

Частное решение имеет вид

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (2.30)$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.29) запишется в форме

$$x = a \sin(kt + \varepsilon) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (2.31)$$

Постоянные  $a$  и  $\varepsilon$  зависят от начальных условий. Таким образом, искомое движение материальной точки является суммой гармонических колебаний, происходящих с собственной частотой  $k$ , и гармонических колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы  $p$ . Подробно исследуем второе слагаемое в (2.31), описывающее чисто вынужденные колебания и не зависящее от начальных условий.

Амплитуда чисто вынужденных колебаний равна

$$A = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|}. \quad (2.32)$$

Перепишем решение (2.30), используя формулу (2.32):

$$x_2 = A \sin(pt + \delta) \quad (k > p),$$

$$x_2 = -A \sin(pt + \delta) = A \sin(pt + \delta - \pi) \quad (k < p).$$

Из полученных соотношений следует, что при  $p < k$  фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы; при  $p > k$  вынужденные колебания сдвинуты по фазе от возмущающей силы на  $\pi$ .

Проследим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от отношения частот  $p/k$ . Для этого преобразуем выражение амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{H}{c|1 - p^2/k^2|} = \frac{x_{ст}}{|1 - p^2/k^2|}, \quad (2.33)$$

где  $x_{ст} = H/c$  — величина статического отклонения точки от положения равновесия при действии силы, равной максимальному значению возмущающей силы. Обозначим

$$\mu = \frac{A}{x_{ст}} = \frac{1}{|1 - p^2/k^2|}.$$

Величина  $\mu$  представляет собой коэффициент динамичности; он показывает, во сколько раз амплитуда колебаний превосходит статическое отклонение. Из графика (рис. 2.10) видно, что при  $p/k \rightarrow 1$  коэффициент динамичности резко возрастет.

Вернемся теперь к общему решению (2.31). Записав его в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta), \quad (2.34)$$

определим постоянные интегрирования, если  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  при  $t = 0$ .

Подставив начальные условия в уравнение (2.34) и в выражение для скорости движения

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt + \frac{pH_0}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta),$$

получим

$$C_1 = x_0 - \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin \delta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \frac{H_0}{k^2 - p^2} \cos \delta.$$

Подставляя  $C_1$  и  $C_2$  в соотношение (2.34), будем иметь

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \\ - \frac{H_0}{k^2 - p^2} \left( \sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin (pt + \delta). \quad (2.35)$$

Такая запись решения позволяет установить, что даже при нулевых начальных условиях ( $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ) точка будет совершать колебания, происходящие с собственной частотой; они определяются членом  $-H_0 (k^2 - p^2)^{-1} \left( \sin \delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt \right)$ , причем амплитуда этих колебаний не зависит от начальных условий.

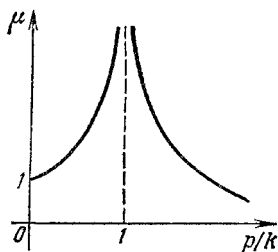


Рис. 2.10

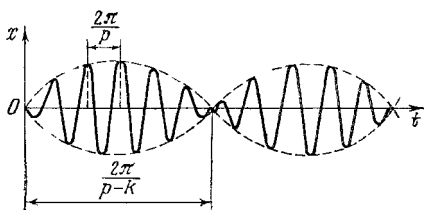


Рис. 2.11

Рассмотрим случай, когда частота  $p$  вынужденных колебаний близка к собственной частоте  $k$  ( $p \approx k$ ). Тогда выражение (2.35) при  $x_0 = 0$  и  $\dot{x}_0 = 0$  примет вид (приближенно полагаем  $p/k = 1$ , но  $k^2 - p^2 \neq 0$ )

$$x \approx \frac{H_0}{k^2 - p^2} [\sin (pt + \delta) - \sin (kt + \delta)],$$

или

$$x \approx 2 \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin \frac{p-k}{2} t \cos (pt + \delta). \quad (2.36)$$

Такое движение называется *биением* (рис. 2.11).

Показанные здесь биения представляют собой колебания, происходящие с частотой  $p$  возмущающей силы, причем амплитуда этих колебаний медленно меняется, следуя также периодическому закону.

Рассмотрим теперь случай, когда собственная частота совпадает с частотой возмущающей силы, т. е.  $p = k$ . Частное решение уравнения (2.29) в этом случае нужно искать в виде

$$x_2 = At \sin (pt + \gamma). \quad (2.37)$$

Подставив выражение (2.37) в дифференциальное уравнение (2.29),

получим

$$2Ap \cos(pt + \gamma) = H_0 \sin(pt + \delta).$$

Введя обозначение  $\varphi = pt + \gamma$ , перепишем это соотношение в виде

$$2Ap \cos \varphi = H_0 \sin \varphi \cos(\delta - \gamma) + H_0 \cos \varphi \sin(\delta - \gamma).$$

Это равенство будет тождественно удовлетворено, если

$$H_0 \cos(\delta - \gamma) = 0, \quad H_0 \sin(\delta - \gamma) = 2Ap.$$

Отсюда  $A = H_0/(2p)$ ,  $\gamma = \delta - \pi/2$  и, следовательно,

$$x_2 = \frac{H_0 t}{2p} \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{H_0 t}{2p} \cos(pt + \delta).$$

Общее решение имеет вид

$$x = a \sin(pt + \varepsilon) - \frac{H_0 t}{2p} \cos(pt + \delta).$$

При начальных условиях  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  имеем \*)

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{H}{2p^2} [\cos \delta \sin pt - pt \cos(pt + \delta)]. \quad (2.38)$$

На рис. 2.12 показан график функции  $x_2$ . Как видно, при  $k = p$  происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний, причем рост амплитуды линейен во времени. Это явление носит название *резонанса*.

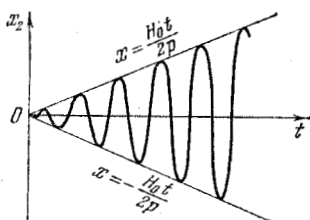


Рис. 2.12

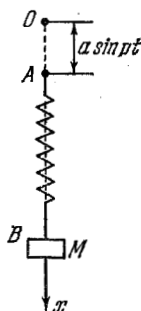


Рис. 2.13

**Задача 2.8.** Груз  $M$  массы  $m$  прикреплен к нижнему концу  $B$  вертикально расположенной пружины, жесткость которой равна  $c$ , а длина в ненапряженном состоянии  $l_0$ . Верхний конец пружины  $A$  перемещают по закону  $a \sin pt$  в вертикальном направлении (рис. 2.13).

Определить вынужденные колебания груза  $M$ , приняв  $m = 0,4$  кг,  $c = 39,2$  Н/м,  $l_0 = 30$  см,  $p = 7$  с<sup>-1</sup>,  $a = 2$  см.

Выберем начало координат в точке  $O$  и проведем ось  $x$  вертикально вниз. Если  $l_0$  — длина пружины в ненапряженном состоянии, то удлинение пружины равно

\*) Это решение можно получить из (2.35), раскрывая неопределенность, которая возникает при  $p \rightarrow k$ .

$x = a \sin pt - l_0$  и, следовательно, сила, действующая на груз со стороны пружины, равна

$$F_x = -c(x - a \sin pt - l_0).$$

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -c(x - a \sin pt - l_0) + mg,$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = g + H_0 \sin pt + cl_0/m,$$

где  $k^2 = c/m$ ,  $H_0 = ca/m$ .

Введем новую переменную  $z$  согласно равенству

$$z = x - (mg/c + l_0);$$

тогда дифференциальное уравнение движения преобразуется к следующей форме:

$$\ddot{z} + k^2z = H_0 \sin pt.$$

Введение новой переменной  $z$  равносильно переносу начала координат в положение равновесия груза. Вынужденные колебания груза определяются формулой (2.30):

$$z = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Подставляя сюда числовые значения параметров, получим

$$z = 4 \sin 7t \text{ см.}$$

Так как  $x = z + mg/c + l_0$ , то

$$x = (4 \sin 7t + 40) \text{ см.}$$

В этом случае амплитуда колебаний груза (4 см) влво больше амплитуды колебаний точки подвеса пружины. Заметим, что груз колеблется около среднего положения, удаленного от верхнего конца пружины на 40 см; этому положению соответствует состояние равновесия груза при отсутствии колебаний точки подвеса.

## § 2.6. Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления

Рассмотрим движение материальной точки вдоль оси  $x$  под действием линейной восстанавливающей силы, вязкой силы сопротивления и возмущающей силы, проекция которой на ось  $x$  равна  $H \sin(pt + \delta)$ .

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + H \sin(pt + \delta).$$

Положив  $c/m = k^2$ ,  $b/m = 2h$ ,  $H/m = H_0$ , получим

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = H_0 \sin(pt + \delta). \quad (2.39)$$

Решение дифференциального уравнения (2.39) складывается из двух решений: общего решения  $x_1$  соответствующего однородного уравнения и частного решения  $x_2$  уравнения (2.39).

Как показано в § 2.3, при  $k > h$  решение однородного уравнения записывается в виде

$$x_1 = e^{-ht} (C_1 \sin k^*t + C_2 \cos k^*t),$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — постоянные интегрирования, а  $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$ .

Частное решение уравнения (2.39) будем искать в виде

$$x_2 = A \sin (pt + \gamma), \quad (2.40)$$

где  $A$  и  $\gamma$  — неопределенные постоянные величины. Таким образом, мы предполагаем, что частное решение описывает колебания постоянной амплитуды, происходящие с частотой возмущающей силы.

Находя  $\dot{x}_2 = pA \cos (pt + \gamma)$ ,  $\ddot{x}_2 = -p^2 A \sin (pt + \gamma)$  и подставляя значения  $x_2$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\ddot{x}_2$  в уравнение (2.39), получим

$$-p^2 A \sin (pt + \gamma) + 2hpA \cos (pt + \gamma) + k^2 A \sin (pt + \gamma) = H_0 \sin (pt + \delta).$$

Положив  $pt + \gamma = \varphi$  и воспользовавшись соотношением

$$\sin (pt + \delta) = \sin (\varphi + \delta - \gamma) = \sin \varphi \cos (\delta - \gamma) + \cos \varphi \sin (\delta - \gamma),$$

для определения  $A$  и  $\gamma$  будем иметь следующие уравнения:

$$A (k^2 - p^2) = H_0 \cos (\delta - \gamma), \quad 2hpA = H_0 \sin (\delta - \gamma),$$

откуда

$$A = \frac{H_0}{V(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}, \quad (2.41)$$

$$\operatorname{tg} (\delta - \gamma) = \frac{2hp}{k^2 - p^2}. \quad (2.42)$$

Подставив найденные значения  $A$  и  $\gamma$  в частное решение, получим

$$x_2 = \frac{H_0}{V(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \sin (pt + \delta + \gamma'),$$

где  $\gamma' = \gamma - \delta$ .

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (2.39) имеет следующий вид:

$$x = e^{-ht} (C_1 \sin k^* t + C_2 \cos k^* t) + \frac{H_0}{V(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \sin (pt + \delta + \gamma'). \quad (2.43)$$

Для определения закона движения материальной точки нужно найти постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ . Пользуясь начальными условиями:  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  при  $t = 0$ , получим значения постоянных

$$C_1 = \frac{1}{k^*} [\dot{x}_0 + hx_0 - hA \sin (\delta + \gamma') - Ap \cos (\delta + \gamma')],$$

$$C_2 = x_0 - A \sin (\delta + \gamma'),$$

где  $A$  — амплитуда вынужденных колебаний.

Подставив значения  $C_1$  и  $C_2$  в уравнение (2.43), найдем закон движения материальной точки в рассматриваемом случае:

$$x = e^{-ht} \left[ \frac{\dot{x}_0 + h x_0}{k^*} \sin k^* t + x_0 \cos k^* t \right] - \\ - e^{-ht} \left\{ \frac{A}{k^*} [h \sin (\delta + \gamma') + p \cos (\delta + \gamma')] \sin k^* t + \right. \\ \left. + A \sin (\delta + \gamma') \cos k^* t \right\} + A \sin (pt + \delta + \gamma').$$

Следовательно, движение материальной точки складывается: из свободных затухающих колебаний (первое слагаемое), обусловленных начальными условиями; из затухающих колебаний (второе слагаемое), имеющих собственную частоту, но вызванных действием вынуждающей силы, и чисто вынужденных колебаний (третье слагаемое). Так как первые два движения с течением времени затухают, то основным колебанием, определяющим характер движения материальной точки, является чисто вынужденное колебание с амплитудой  $A$  и частотой  $p$ . Следует заметить, что при наличии сопротивления вынужденные колебания сдвинуты по фазе относительно возмущающей силы на  $\gamma'$ .

Вводя обозначения  $z = p/k$ ,  $\beta = h/k$ , перепишем формулу (2.41) в виде

$$A = \frac{x_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{h^2}{k^2} \frac{p^2}{k^2}}} = \frac{x_{ст}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}, \quad (2.44)$$

где  $x_{ст} = H_0/k^2 = H/c$  представляет собой статическое перемещение, вызываемое постоянной силой  $H$ .

Введем в рассмотрение коэффициент динамичности

$$\mu = \frac{A}{x_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}, \quad (2.45)$$

который характеризует динамический эффект, вызываемый вынуждающей силой.

Исследуем зависимость коэффициента динамичности от  $z$  — отношения частот вынуждающей силы и собственных колебаний в среде без сопротивления, а также от коэффициента  $\beta$ , характеризующего сопротивление среды. Очевидно, что, найдя зависимость коэффициента динамичности от  $z$  и  $\beta$ , мы тем самым определим и зависимость от них амплитуды вынужденных колебаний.

Найдем экстремум функции

$$y = (1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2. \quad (2.46)$$

Для этого приравняем нулю производную

$$\frac{dy}{dz} = 2(1 - z^2)(-2z) + 8\beta^2 z = 0. \quad (2.47)$$



Корнями этого уравнения будут

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}, \quad z_3 = -\sqrt{1 - 2\beta^2}. \quad (2.48)$$

Так как  $z \geq 0$ , то корень  $z_3$  должен быть отброшен. Найдем вторую производную от  $y$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = 12z^2 - 4(1 - 2\beta^2).$$

Для  $z_1 = 0$  при  $1 - 2\beta^2 < 0$ , т. е. при  $\beta > \sqrt{2}/2$ ,

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = 4(2\beta^2 - 1) > 0$$

и, следовательно, функция  $y$  имеет минимум, а коэффициент динамичности  $\mu$  — максимум. Других действительных корней при этих значениях  $\beta$  уравнение (2.47) не имеет.

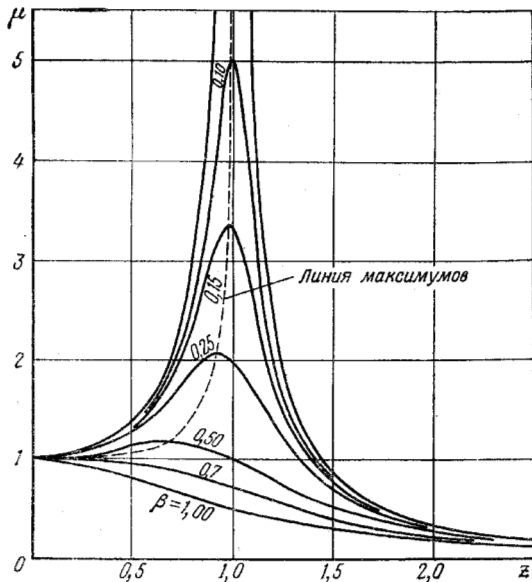


Рис. 2.14

Если  $\beta < \sqrt{2}/2$ , то для  $z_1 = 0$   $d^2 y/dz^2 < 0$ . Это значит, что  $\mu$  при этом имеет минимум. Для корня же  $z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = 8(1 - 2\beta^2) > 0,$$

т. е. при  $z = z_2$  коэффициент динамичности имеет максимум.

Заметим, что всегда  $z_2 \leq 1$  и, только когда  $\beta = 0$  (среда без сопротивления),  $z_2 = 1$ . Ранее было показано, что при  $\beta = 0$  и  $z_2 = 1$  решение (2.40) не имеет смысла и его нужно искать в виде (2.37).

Максимальное значение коэффициента динамичности найдем, подставив  $z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$  в формулу (2.45):

$$\mu_{\max} = \frac{1}{2\beta \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.49)$$

На рис. 2.14 показаны кривые, определяющие зависимость коэффициента динамичности от  $z = p/k$ . Каждой из кривых соответствует определенное значение  $\beta = h/k$ . Пунктирная линия проходит через точки максимума.

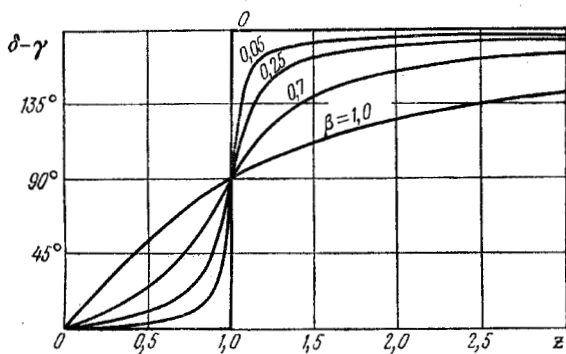


Рис. 2.15

Из рассмотрения этого рисунка следует, что амплитуда вынужденных колебаний при  $z$ , достаточно большом и достаточно малом по сравнению с  $z = 1$ , очень мало зависит от сопротивления среды. При  $z$ , близких к  $z = 1$ , влияние сопротивления на амплитуду вынужденных колебаний весьма существенно.

При  $z \rightarrow \infty$  амплитуда вынужденных колебаний асимптотически стремится к нулю. Это значит, что при большой частоте возмущающей силы по сравнению с собственной частотой амплитуда вынужденных колебаний весьма мала.

На рис. 2.15 представлена зависимость сдвига фазы вынужденных колебаний относительно возмущающей силы в зависимости от  $z$  и  $\beta$ . Отметим, что при  $z = 1$  сдвиг фазы равен  $\pi/2$  при любом значении  $\beta$ . Резонансом при колебаниях в среде с сопротивлением называют вынужденные колебания при  $z = 1$ , т. е. при  $p = k$ , что отвечает примерно максимальному значению амплитуды вынужденных колебаний.

**Задача 2.9.** Под двигатель  $B$  (рис. 2.16) требуется подвести фундамент. Необходимо определить такую толщину кладки  $a$ , чтобы коэффициент динамичности не превышал единицы для всех частот вынужденных колебаний, передаваемых от двигателя фундаменту. Сопротивление грунта можно схематизировать как реакцию упругих сил  $F$  и вязких сил  $R$ , вызванных внутренними силами сопротивления.

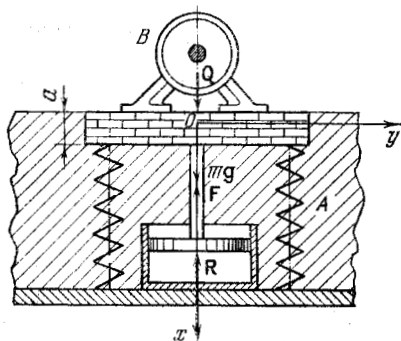


Рис. 2.16

Отнесенные к единице площади фундамента, коэффициенты жесткости и вязкости соответственно равны  $c = 19,6 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$  и  $b = 588 \text{ кН} \cdot \text{с/м}^3$ . Плотность материала фундамента  $\rho = 24,5 \text{ кН} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$ .

Введем систему координат  $xOy$ , выбрав ее начало  $O$  в положении равновесия центра тяжести фундамента.

Обозначим через  $S$  площадь основания и представим проекцию вынуждающей силы  $Q$  на ось  $x$  в виде  $Q_x = H \sin pt$ . Тогда уравнение движения

$$mw = F + R + Q + mg$$

в проекции на ось  $x$  дает

$$aS\rho\ddot{x} = -cS(x + \lambda_0) - bS\dot{x} + aSpg + H \sin pt.$$

Здесь мы воспользовались очевидными равенствами  $m = aS\rho$ ,  $F_x = -cS(x + \lambda_0)$ ,  $R_x = -bS\dot{x}$ , где  $\lambda_0$  — статическая осадка фундамента.

Приведем уравнение движения к нормальному виду. Для этого разделим его на  $aS\rho$  и воспользуемся равенством  $aSpg = c\lambda_0$ :

$$\ddot{x} + \frac{b}{a\rho}\dot{x} + \frac{c}{a\rho}x = \frac{H}{aS\rho}\sin pt.$$

Сравнивая с уравнением (2.39), найдем  $h = b/(2a\rho)$ ,  $k^2 = c/(a\rho)$ . Следовательно, безразмерный коэффициент вязкости равен  $\beta = h/k = b/(2\sqrt{a\rho c})$ .

Коэффициент динамичности  $\mu$  при всех частотах  $p$  не будет превосходить единицы, если потребовать, чтобы кривая  $\mu(z)$  не имела максимума при  $z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$ . Следовательно, должно выполняться неравенство  $\beta \geq \sqrt{2}/2$ , или  $b/(2\sqrt{a\rho c}) \geq \sqrt{2}/2$ . Отсюда получим толщину кладки  $a: a \leq b^2/(2\rho c)$ . Подставляя в это неравенство данные числовые значения параметров, получим

$$a \leq 3,6 \text{ м.}$$

## § 2.7. Электродинамические аналогии. Понятие об исследовании колебаний материальных систем с помощью электронных аналоговых машин

Колебательные процессы, происходящие в различных физических системах, описываются часто одинаковыми математическими уравнениями. Это обстоятельство дает возможность установить аналогию между системами различной физической природы. Наиболее полно эта аналогия установлена между механическими и электрическими системами.

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, движение которой описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q(t). \quad (2.50)$$

Здесь  $x$  — координата,  $m$  — масса точки,  $b$  — коэффициент сопротивления среды,  $c$  — коэффициент жесткости пружины,  $Q(t)$  — возмущающая сила. Символически систему, отвечающую уравнению (2.50), изображают обычно схемой, показанной на рис. 2.17.

Рассмотрим теперь электрический контур, в котором индуктивность  $L$ , омическое сопротивление  $R$ , конденсатор емкостью  $C$  и внешний источник энергии э. д. с.  $E(t)$  соединены последовательно

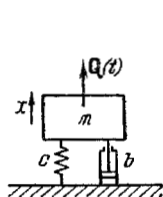


Рис. 2.17

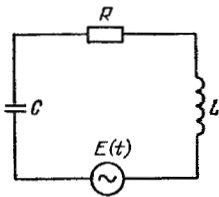


Рис. 2.18

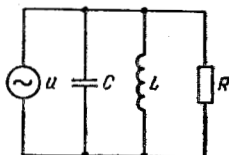


Рис. 2.19

(рис. 2.18). Согласно второму закону Кирхгофа сумма падений напряжений на отдельных участках цепи равна разности потенциалов на концах зажимов, т. е. э. д. с. источника энергии. Падение напряжения от индуктивности равно  $L \frac{di}{dt}$ , где  $i$  — сила тока, падение напряжения от омического сопротивления равно  $Ri$ , а падение напряжения в конденсаторе определяется равенством  $\frac{1}{C} q$ , где  $q$  — заряд конденсатора. Следовательно, по второму закону Кирхгофа будем иметь

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t),$$

или, учитывая, что  $i = dq/dt$ ,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (2.51)$$

Сравнивая с уравнением (2.50), видим, что колебания механической системы с одной степенью свободы и изменение заряда в электрической цепи описываются с точностью до обозначений совершенно одинаковыми дифференциальными уравнениями. Следовательно, между этими системами можно провести аналогию, сопоставив заряд  $q$  с координатой  $x$ , индуктивность  $L$  с массой  $m$ , омическое сопротивление  $R$  с коэффициентом сопротивления среды,

величину, обратную емкости  $1/C$ , с коэффициентом жесткости  $c$  и электродвижущую силу  $E(t)$  с возмущающей силой  $Q(t)$ .

Для электрического контура с параллельно соединенными элементами (рис. 2.19) на основании первого закона Кирхгофа будем иметь (складываются токи)

$$\frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} = i(t),$$

где  $u$  — напряжение.

Дифференцируя по времени, получим

$$C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} u = \frac{di}{dt}.$$

Здесь мы имеем другую систему аналогий, в которой координате  $x$  соответствует напряжение  $u$ , массе  $m$  соответствует емкость  $C$  конденсатора, коэффициенту сопротивления среды  $b$  отвечает проводимость  $1/R$ , коэффициенту жесткости пружины  $c$  — величина, обратная индуктивности  $1/L$ , и возмущающей силе  $Q(t)$  — скорость изменения тока  $di/dt$ .

Сведем результаты в таблицу 2 электродинамических аналогий.

Т а б л и ц а 2

Механические величины	Электрические величины	
	1-я аналогия: сила—напряжение	2-я аналогия: сила—ток
1. Координата $x$	Заряд $q$	Напряжение $u$
2. Масса $m$	Индуктивность $L$	Емкость $C$
3. Коэффициент жесткости $c$	Обратная величина емкости $1/C$	Обратная величина индуктивности $1/L$
4. Коэффициент сопротивления среды $b$	Омическое сопротивление $R$	Проводимость $1/R$
5. Сила $Q(t)$	Э. д. с. $E(t)$	Скорость тока $di/dt$

Для того чтобы электродинамическими аналогиями можно было пользоваться без употребления переходных коэффициентов, достаточно выразить все величины в международной системе единиц СИ.