

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «**Теория колебаний**»

по направлению подготовки

23.05.01 «Наземные транспортно-

технологические средства»

очной (очно-заочной, заочной) форм обучения

Ростов-на-Дону  
2024-2025

## 1. Свободные колебания материальной точки.

Пусть на материальную точку действует сила, прямо пропорциональная отклонению точки от положения равновесия и направленная в сторону, противоположную этому отклонению (рис.1).

**Восстанавливающей** называется сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия:

$$\vec{F} = -c \overline{OM},$$

где  $c$  – коэффициент пропорциональности.

Направим ось  $x$  по линии действия силы, выбрав начало отсчета в положении равновесия точки. Проекция восстанавливающей силы на ось  $x$  равна  $F_x = -cx$ .

В начальный момент при  $t=0$ , координата точки  $x = x_0$ , начальная скорость  $\dot{x} = \dot{x}_0$ .

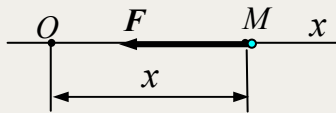


Рис.1

Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием восстанавливающей силы имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx.$$

Разделим обе части этого уравнения на  $m$ ,

обозначим  $\frac{c}{m} = k^2$ , в результате получим дифференциальное уравнение движения точки под действием восстанавливающей силы:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0, \quad (1)$$

Уравнение (1) – однородное линейное уравнение второго порядка. Для его решения запишем соответствующее характеристическое уравнение  $r^2 - k^2 = 0$ , корни которого  $r_{1,2} = \pm ki$ . Так как корни характеристического уравнения  $r_1$  и  $r_2$  являются мнимыми, то решение уравнения (3.1) записывается в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (2)$$

Это решение можно представить в виде:

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (3)$$

Распишем синус суммы двух углов в уравнении (3) и получим

$$x = a \cos \alpha \sin kt + a \sin \alpha \cos kt,$$

Заменим  $a \sin \alpha = C_1$   $a \cos \alpha = C_2$ , получим уравнение в форме (2).

Таким образом, под действием восстанавливающей силы материальная точка совершает движение по синусоидальному закону:

$$x = a \sin(kt + \alpha).$$

**Такое движение называется свободными гармоническими колебаниями материальной точки.**

График гармонических колебаний показан на рис. 2.

**Амплитудой** колебаний называется максимальное отклонение точки от положения равновесия, равное  $a$ .

**Фазой колебаний** называется аргумент  $(kt + \alpha)$ , где  $\alpha$  - **начальная фаза**.

Частота гармонических колебаний  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ . (4)

Определим амплитуду и начальную фазу колебаний. Скорость колебаний равна

$$\dot{x} = ak \cos(kt + \alpha). \quad (5)$$

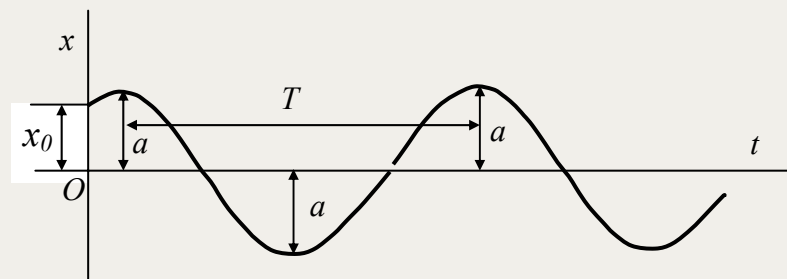


Рис. 3.2

Подставим в уравнения (3) и (5) начальные условия:

$t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ , получим:

$$x_0 = a \sin \alpha,$$

$$\dot{x}_0 = ak \cos \alpha.$$

Отсюда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{V_0}. \quad (6)$$

Таким образом, амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями движения точки

**Периодом колебаний** называется наименьший промежуток времени  $T$ , по истечению которого движение точки полностью повторяется, т.е. точка

проходит одно и то же положение в одном и том же направлении, следовательно, координаты точек по истечению времени  $T$  совпадают:

$$x = a \sin(kt + \alpha) = a \sin(kt + T + \alpha).$$

Это равенство справедливо, если  $kt + T + \alpha = kt + \alpha + 2\pi$ .

Следовательно, период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} \quad (7)$$

Откуда

$$k = \frac{2\pi}{T}. \quad (8)$$

**Частота  $k$  определяет число полных колебаний точки за время, равное  $2\pi$  секундам.**

Частота  $k$  не зависит от начальных условий движения, поэтому ее называют **собственной частотой гармонических колебаний**

### 1.1. Колебания груза, подвешенного на пружине



Рис.3.

Рассмотрим движение груза, подвешенного на пружине, коэффициент жесткости которой равен  $c$  (рис.3).

На груз, подвешенный на пружине, действуют сила тяжести и сила упругости пружины. Величина силы упругости, возникающей при деформации пружины, пропорциональна ее удлинению  $\lambda$ :

$$F = c\lambda.$$

**Статическим  $\lambda_{cm}$**  называется удлинение пружины, при котором груз находится в равновесии. В данном случае сила упругости, равная  $F_{cm} = c\lambda_{cm}$ , в положении равновесия уравнивается силой тяжести:  $mg = c\lambda_{cm}$ .

Отсюда статическое удлинение  $\lambda_{cm} = \frac{mg}{c}$ . (9)

Рассмотрим движение груза после того, как он был смещен из положения равновесия и отпущен с начальной скоростью.

Примем груз за материальную точку, направим ось  $x$  вертикально вниз, приняв за начало отсчета положение статического равновесия.

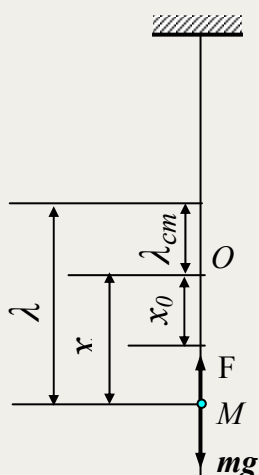


Рис.4

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  точка смещена из положения статического равновесия на величину  $x_0$ , а начальная скорость равна  $\dot{x}_0$  (рис.4).

При отклонении груза  $M$  от положения статического равновесия на величину  $OM = x$ , полная деформация пружины равна  $\lambda = (\lambda_{cm} + x)$ , проекция силы упругости на ось  $x$  равна

$$F_x = -c (\lambda_{cm} + x)$$

Движение точки происходит под действием двух сил: силы тяжести и восстанавливающей силы. Запишем дифференциальное уравнение для этого движения

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - c (\lambda_{cm} + x).$$

Подставим в это уравнение значение  $c = \frac{mg}{\lambda_{cm}}$ , полученное из формулы (9):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - \frac{mg}{\lambda_{cm}} (\lambda_{cm} + x) = mg - mg - \frac{mg}{\lambda_{cm}} x.$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{\lambda_{cm}} x = 0.$$

Заменим  $k^2 = \frac{g}{\lambda_{cm}}$ , получим дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$x = a \sin(kt + \alpha).$$

Следовательно, движение груза, подвешенного на пружине, представляет собой свободные гармонические колебания относительно положения статического равновесия. Частота и период свободных колебаний груза определяются по формулам (5) и (6), после подстановки в них значения  $c = \frac{mg}{\lambda_{cm}}$  из формулы (9) получим

$$k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}}, \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}}.$$

Амплитуда  $a$  и начальная фаза  $\alpha$  зависят от начальных условий и определяются по формулам (6):

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{V_0},$$

## 1.2. Примеры на свободные колебания

**Пример 1.** Груз массой  $m$  подвешен на двух последовательно соединенных пружинах с различными коэффициентами жесткости  $c_1$  и  $c_2$  (рис.4). Определить частоту колебаний. последовательно соединенных пружинах полное статическое удлинение равно сумме удлинений двух пружин:

$$\lambda = \lambda_{1cm} + \lambda_{2cm}.$$

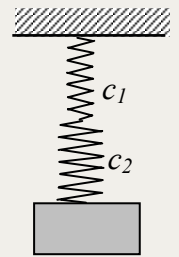


Рис.4

Статическое удлинение каждой пружины определяется форму-

лой (8): 
$$\lambda_{1cm} = \frac{mg}{c_1}, \quad \lambda_{2cm} = \frac{mg}{c_2}.$$

Полное статическое удлинение выражается через эквивалентный коэффициент жесткости двух пружин  $c$ , значит,  $\lambda = \frac{mg}{c}$ .

Тогда 
$$\frac{mg}{c} = \frac{mg}{c_1} + \frac{mg}{c_2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}, \quad \text{откуда} \quad c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

**Частота колебаний** 
$$k = \frac{c}{m} = \frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}.$$

**Пример 2.** Определить эквивалентный коэффициент жесткости двух параллельно соединенных пружин с различными коэффициентами жесткости  $c_1$  и  $c_2$ .

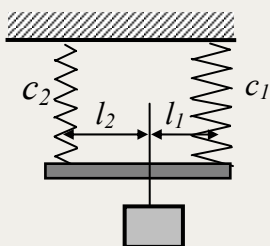


Рис.5

При параллельном соединении пружин (рис.3.5) в положении статического равновесия результирующая сила упругости  $F = F_1 + F_2$ ,

Тогда:

$$c\lambda_{cm} = c_1 \lambda_{1cm} + c_2 \lambda_{2cm}.$$

Результирующее удлинение и удлинения обеих пружин должны быть одинаковы:  $\lambda_{cm} = \lambda_{1cm} = \lambda_{2cm}$ .

Следовательно,  $c = c_1 + c_2$ .

Кроме того, точка, к которой прикрепляется груз, должна удовлетворять условию равновесия, т.е. сумма моментов сил упругости относительно точки закрепления груза должна быть равна нулю:  $F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0$ .

Отсюда следует,  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$ , или  $\frac{c_1 \lambda_{cn}}{c_2 \lambda_{cn}} = \frac{l_2}{l_1}$ .

Окончательно,  $\frac{l_2}{l_1} = \frac{c_1}{c_2}$ , т.е. точка закрепления груза делит расстояние между пружинами обратно пропорционально коэффициентам их жесткости.

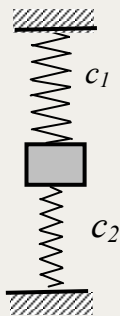


Рис.6

**Пример 3.** Определить частоту колебаний груза, подвешенного закрепленного на двух пружинах с коэффициентами жесткости  $c_1$  и  $c_2$ , как показано на рис. 6.

В этом случае статические удлинения обеих пружин одинаковы. Сила тяжести груза уравнивается силами упругости обеих пружин  $F_1 = c_1 \lambda_{cm}$  и  $F_2 = c_2 \lambda_{cm}$ , значит

$$mg = c_1 \lambda_{cm} + c_2 \lambda_{cm} = (c_1 + c_2) \lambda_{cm}.$$

Отсюда эквивалентный коэффициент жесткости  $c = c_1 + c_2$ .

Частота колебаний груза в этом случае равна

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}.$$

**Пример 4.** На конец пружины, закрепленной на гладкой наклонной плоскости, без начальной скорости прикрепляют груз массой  $m$ . Коэффициент жесткости пружины равен  $c$ , угол наклона –  $\beta$ . Определить колебания груза на пружине (рис.7).

Груз совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид:

$$x = a \sin(kt + \alpha),$$

где  $a$  – амплитуда,  $\alpha$  – начальная фаза,

$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – частота колебаний.

Груз подвешивают к концу недеформированной пружины, а начало отсчета координаты  $x$  выбирается в положении статического равновесия, следовательно, начальная координата равна статическому удлинению пружины, взятому со знаком минус:  $x_0 = -\lambda_{cm}$ . Начальная скорость  $\dot{x} = 0$ .

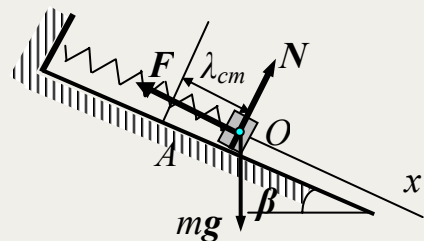


Рис. 7

Определим значение  $\lambda_{cm}$ , составив уравнения равновесия груз на наклонной плоскости:

$$\sum F_{kx} = mg \sin \beta - F_{cm} = 0.$$

Подставим в это уравнение значение силы упругости в положении статического равновесия  $F_{cm} = c\lambda_{cn}$ , получим

$$mg \sin \beta - c\lambda_{cn} = 0, \text{ отсюда } \lambda_{cn} = \frac{mg \sin \beta}{c}.$$

Следовательно, начальная координата  $x_0 = -\frac{mg \sin \beta}{c}.$

Для определения амплитуды и начальной фазы подставим в выражения (3.6) начальные условия, получим  $a = \lambda_{cn}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ ,  $\alpha = \pi/2$ .

Окончательно, уравнение движения груза запишется в виде:

$$x = -\lambda_{cn} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{mg \sin \beta}{c} \cos \sqrt{\frac{c}{m}}t.$$

## 2. Колебания материальной точки при наличии сил сопротивления

Пусть на материальную точку действуют восстанавливающая сила  $\bar{F} = -c \overline{OM}$  и сила сопротивления, пропорциональная скорости,  $\bar{R} = -\beta \bar{V}$  (рис.8). Определим движение точки для случая, когда в начальный момент при  $t = 0$   $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = V_0$ .

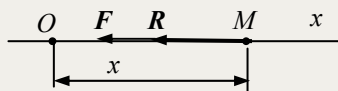


Рис.3.8

Составим дифференциальное уравнение движения точки под действием указанных сил:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \beta \dot{x}.$$

Преобразуем это уравнение, разделив на  $m$  и обозначив  $2n = \frac{\beta}{m}$ ,  $k^2 = \frac{c}{m}$ :

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \quad (10)$$

Уравнение (10) – однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, характеристическое уравнение которого имеет вид  $r^2 + 2nr + k^2 = 0$ . Корни характеристического уравнения равны

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (11)$$



Характер движения существенно зависит от соотношения между величинами  $n$  и  $k$ . Различаются три вида движения:

- а)  $n < k$  – случай малого сопротивления;
- б)  $n = k$  – предельный случай;
- в)  $n > k$  – случай большого сопротивления/

### 2.1. Затухающие колебания

Рассмотрим движение материальной точки при малом сопротивлении, для которого  $n < k$ .

В этом случае корни характеристического уравнения (11) будут комплексными, т.е.

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}.$$

Следовательно, уравнение движения точки имеет вид

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t). \quad (12)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1, C_2$  вычислим

$$\begin{aligned} \dot{x} = e^{-nt} (-C_1 \sqrt{k^2 - n^2} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} t) - \\ - ne^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим в (12) и (13) начальные условия:  $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = V_0$ .

Получим

$$0 = C_1, \quad V_0 = C_2 \sqrt{k^2 - n^2} - nC_1,$$

откуда  $C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{V_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$

Тогда уравнение движения точки (12) запишется в виде

$$x = e^{-nt} \frac{V_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t. \quad (14)$$

Обозначим  $A = \frac{V_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$

Тогда

$$x = A e^{-nt} \sin k_1 t. \quad (15)$$

Движение груза, описываемое уравнением (15), представляет собой затухающие колебания, так как при  $t \rightarrow \infty \quad x \rightarrow 0$  (рис.9).

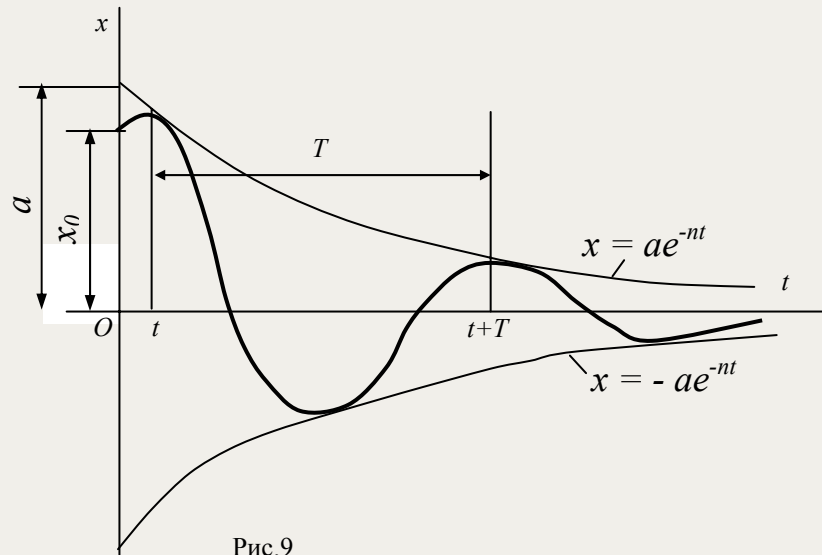


Рис.9

Частота затухающих колебаний равна  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ .

**Периодом затухающих колебаний  $T_C$  называется промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями точки в одном направлении.**

Рассмотрим два последовательных максимальных отклонения в одном направлении в моменты времени  $t$  и  $t+T_C$ .

В моменты максимальных отклонений скорость точки равна нулю, поэтому в момент времени  $t$

$$V_{x1} = -nAe^{-nt} \cos k_1 t + k_1 A e^{-nt} \sin k_1 t = 0, \text{ откуда } \operatorname{tg} k_1 t = \frac{k_1}{n}.$$

В момент времени  $t+T_C$

$$V_{x2} = -nAe^{-nt} \cos(k_1 t + T_C) + k_1 A e^{-nt} \sin(k_1 t + T_C) = 0, \text{ откуда } \operatorname{tg} k_1 t = \frac{k_1}{n}$$

Следовательно,  $\operatorname{tg} k_1 t = \operatorname{tg} (k_1 t + T_C)$ .

Равные значения тангенсов повторятся при минимальной разности значений их аргументов, равной  $2\pi$ :  $k_1 t + T_C - k_1 t = 2\pi$ .

Значит,

$$T_C = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Из этой формулы следует, что при наличии силы сопротивления **период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний**:  $T_C > T$ .

**Амплитудой затухающих колебаний** называют наибольшее отклонение точки от положения равновесия:

$$a = Ae^{-nt}.$$

Определим отношение двух следующих одна за другой амплитуд затухающих колебаний. Пусть в момент времени  $t$  амплитуда  $a_t = Ae^{-nt}$ , через промежуток времени, равный половине периода  $T_C/2$ , амплитуда становится равной

$$a_{t+T} = Ae^{-n(t+\frac{T_C}{2})}.$$

Тогда

$$D = \frac{Ae^{-n(t+\frac{T_C}{2})}}{Ae^{-nt}} = e^{-n\frac{T_C}{2}}. \quad (16)$$

Таким образом, отношение каждой последующей амплитуды затухающих колебаний к предыдущей постоянно, т.е. последовательные значения амплитуд составляют геометрическую прогрессию со знаменателем  $D$ , называемым **декрементом колебаний** и определяемым по формуле (16).

Движение, описываемое уравнением (15), не является периодическим, так как последовательные максимальные отклонения точки от положения равновесия уменьшаются.

Таким образом, влияние **сопротивления на свободные колебания материальной точки выражается в уменьшении амплитуды по закону геометрической прогрессии.**

## 2.2. Аperiodическое движение

1. Рассмотрим подробно движение материальной точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления, параметры которых характеризуются равенством  $n = k$ . Дифференциальное уравнение этого движения представлено уравнением (10). Корни соответствующего характеристического уравнения (11) будут действительными и равными:  $r_1 = r_2 = n$ .

Следовательно, решение дифференциального уравнения (10) запишем в виде

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t). \quad (17)$$

Скорость точки

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-nt} \quad (18)$$

Подставим в (17) и (18) начальные условия  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  и получим уравнения для определения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$x_0 = C_1, \quad \dot{x}_0 = -C_1 n + C_2,$$

откуда

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \dot{x}_0 + n x_0.$$

Таким образом, для заданных начальных условий уравнение движения точки запишется в виде

$$x = e^{-nt} (x_0 + (\dot{x}_0 + n x_0) t) \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что движение точки не носит колебательно-го характера, но остается затухающим, так как при  $t \rightarrow \infty$   $x \rightarrow 0$ .

Такое движение называется **апериодическим**.

На рис. 10 показаны три графика апериодического движения, соответствующие различным начальным условиям.

На всех трех графиках начальное отклонение точки от положения равновесия  $x_0 > 0$ . График *a*) представляет собой движение точки с начальной скоростью  $\dot{x}_0 > 0$ . Благодаря этой скорости точка сначала удаляется от положения равновесия, а затем под действием восстанавливающей силы приближается к нему. График *b*) соответствует движению точки с достаточно большой по величине начальной скоростью  $\dot{x}_0$ , направленной противоположно начальному отклонению  $x_0$ . В этом случае точка может совершить один переход через положение равновесия, а затем приблизиться к этому положению. График *c*) соответствует движению, при котором скорость  $\dot{x}_0$  противоположна по направлению  $x_0$ , но не велика по величине.

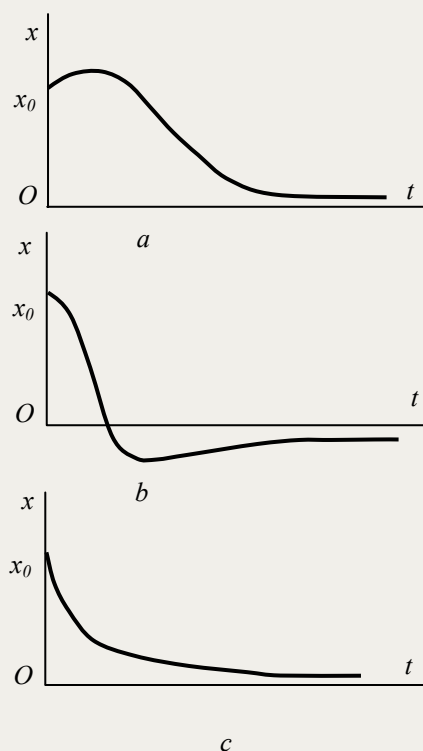


Рис.10

**2. Случай большого сопротивления ( $n > k$ ).** В этом случае оба корня характеристического уравнения (11) будут отрицательными:

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Решение дифференциального уравнения (3.10) записывается в виде

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

или

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}).$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются по начальным условиям.

Движение точки в этом случае также является аperiodическим, так как при  $t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$ .

График такого движения в зависимости от начальных условий может иметь один из трех видов, представленных на рис.3.10.

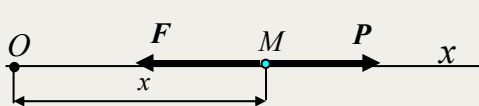
### 3. Вынужденные колебания

Рассмотрим движение материальной точки в том случае, когда на нее, кроме восстанавливающей силы  $\bar{F} = -c\overline{OM}$ , действует возмущающая сила  $\bar{P}$ , периодически изменяющаяся с течением времени. Пусть проекция этой силы на ось  $x$ , вдоль которой совершается движение материальной точки, изменяется по гармоническому закону (рис.11).

$$P_x = H \sin pt, \quad (20)$$

где  $H$  – максимальное значение проекции силы  $P_x$ ;  $p$  – частота возмущающей силы.

Составим дифференциальное уравнение точки, находящейся под действием указанных сил:



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - H \sin pt$$

Рис.3. 11

После преобразований:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (21)$$

В этом уравнении:  $k^2 = \frac{c}{m}$ ,  $h = \frac{H}{m}$ .

Общее решение неоднородного уравнения (21) равно  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1$  – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения  $\ddot{x} + k^2 x = 0$ , а  $x_2$  – частное решение уравнения (21).

Решение однородного уравнения  $\ddot{x} + k^2 x = 0$  запишем в виде

$$x_1 = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \quad (22)$$

Частное решение  $x_2$  определяется в зависимости от соотношения частоты возмущающей силы  $p$  и частоты собственных колебаний  $k$ .

Пусть частота возмущающей силы не равна частоте собственных колебаний.

Для значений  $p \neq k$  частное решение дифференциального уравнения (21) в соответствии с видом функции, стоящей в правой его части уравнения, следует искать в форме

$$x_2 = A \sin(pt + \gamma). \quad (23)$$

Уравнение (23) описывает гармонические колебания с частотой, равной частоте возмущающей силы.

***Колебания материальной точки, происходящие с частотой возмущающей силы, называются вынужденными.***

$A$  – амплитуда вынужденных колебаний;  $\gamma$  – начальная фаза.

Определим постоянные  $A$  и  $\gamma$ . Найдем вторую производную по времени от  $x_2$ :

$$\ddot{x}_2 = -p^2 A \sin(pt + \gamma),$$

Подставим значения  $x_2$  и  $\ddot{x}_2$  в уравнение (21):

$$-p^2 A \sin(pt + \gamma) + k^2 A \sin(pt + \gamma) = h \sin pt$$

или

$$A(k^2 - p^2) \sin pt \cos \gamma + A(k^2 - p^2) \cos pt \sin \gamma = h \sin pt \quad (24)$$

***Полученное равенство справедливо при любом  $t$ , что возможно при равных коэффициентах, стоящих при одинаковых тригонометрических функциях в правой и левой его частях:***

$$A(k^2 - p^2) \cos \gamma = h, \quad (25)$$

$$A(k^2 - p^2) \sin \gamma = 0. \quad (26)$$

Из уравнения (26) следует, что  $\sin \gamma = 0$ , этому равенству удовлетворяют два значения начальной фазы:  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = \pi$ . Учитывая равенство (25), заключаем, что  $\gamma = 0$  при условии, что  $p < k$ . В этом случае вынужденные колебания совпадают по фазе с возмущающей силой. Для колебаний, происходящих с частотой  $p > k$ , фаза вынужденных колебаний отличается от фазы возмущающей силы на величину  $\pi$ .

Таким образом, в случае вынужденных колебаний малой частоты точка всегда отклонена от начала координат в ту же сторону, куда в данный момент

направлена возмущающая сила. В случае вынужденных колебаний большой частоты в любой момент времени отклонение точки **от начала отсчета** противоположно направлению возмущающей силы.

Из уравнения (25) получаем значение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{h}{|k^2 - p^2|}. \quad (27)$$

Следовательно, уравнение вынужденных колебаний для  $p < k$  и для  $p > k$ , может быть записано в виде

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (28)$$

Подставим значения  $x_1 = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$  и  $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$ , в общее решение  $x = x_1 + x_2$  уравнения (3.21):

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt \quad (29)$$

Определим в уравнении (3.29) постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ . Для этого вычислим производную

$$\dot{x} = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt \quad (30)$$

и подставим в выражения (3.29) и (3.30) начальные условия  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ :

$$x_0 = C_2, \quad \dot{x}_0 = C_1 k + \frac{hp}{k^2 - p^2},$$

откуда  $C_1 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2}$ ,  $C_2 = x_0$ .

Уравнение движения точки (29) принимает вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (31)$$

**Движение точки является результатом трех движений:**

1) свободных колебаний, возникающих под действием на точку восстанавливающей силы при начальных условиях  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  и не зависящих от возмущающей силы:

$$x_{11} = x_o \cos kt + \frac{\dot{x}_o}{k} \sin kt ;$$

2) колебаний, имеющих собственную частоту  $k$ , амплитуда которых определяется воздействием возмущающей силы и не зависит от начальных условий:

$$x_{12} = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt ;$$

3) вынужденных колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы и не зависящих от начальных условий:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

### 3.1. Биения

Рассмотрим движение точки под действием восстанавливающей и возмущающей сил при частоте возмущающей силы  $p$ , близкой к частоте собственных колебаний  $k$ .

При нулевых начальных условиях  $x_o = 0$ ,  $\dot{x}_o = 0$  уравнение (31) принимает вид

$$x = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (32)$$

Из уравнения (32) следует, что и при нулевых начальных условиях движение точки является результатом сложения двух колебаний. Первое слагаемое этого уравнения описывает колебания, происходящие с собственной частотой  $k$ :

$$x_{12} = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt .$$

Амплитуда этих колебаний не зависит от начальных условий.

Второе слагаемое описывает вынужденные колебания, происходящие с частотой возмущающей силы:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Пусть частота возмущающей силы близка к частоте собственных колебаний точки, т.е. примем  $\frac{p}{k} \approx 1$  и с учетом этого преобразуем уравнение (32)

$$\begin{aligned} x &= -\frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt = \frac{h}{k^2 - p^2} (\sin pt - \sin kt) = \\ &= 2 \frac{h}{k^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-k}{2}t\right) \cos\left(\frac{p+k}{2}t\right) = 2 \frac{h}{k^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-k}{2}t\right) \cos pt. \end{aligned}$$



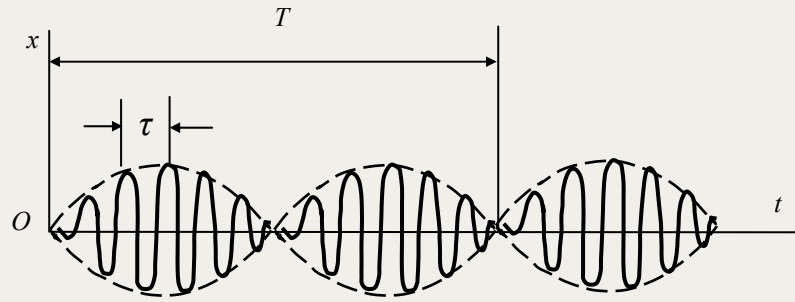


Рис.12

Итак, уравнение движения точки принимает вид

$$x = 2 \frac{h}{k^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-k}{2}t\right) \cos pt.$$

Движение, соответствующее этому уравнению, представляет собой колебания, происходящие с частотой возмущающей силы  $p$ . Период этих колебаний равен  $\tau = \frac{2\pi}{p}$ , амплитуда колебаний, равная  $2 \frac{h}{k^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-k}{2}t\right)$ , меняется по периодическому закону, частота изменения амплитуды равна  $\frac{p-k}{2}$ , а период ее изменения  $T_A = \frac{4\pi}{p-k}$ . Таким образом, для  $p \approx k$  период изменения амплитуды  $T_A$  значительно превышает период колебаний  $\tau$ . Такое движение называется **биениями**, график этого движения показан на рис. 12.

### 3.2. Вынужденные колебания: коэффициент динамичности

Подробно исследуем вынужденные колебания, описываемые уравнением (28):

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Амплитуда вынужденных колебаний  $A = \frac{h}{|k^2 - p^2|}$  зависит от частоты возмущающей силы  $p$  и частоты собственных колебаний  $k$ . Обозначим  $z = p/k$ , величина  $z$  называется коэффициентом расстройки.

Исследуем **зависимость амплитуды вынужденных колебаний от коэффициента расстройки**  $z = p/k$ .

Преобразуем выражение, полученное для амплитуды:

$$A = \frac{h}{|k^2 - p^2|} = \frac{H}{c \left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|} = \frac{x_{cm}}{|1 - z^2|},$$

где  $x_{cm} = H / c$  - величина **статического отклонения** точки под действием постоянной силы  $H$ .

Определим отношение амплитуды вынужденных колебаний к величине статического отклонения точки, называемое **коэффициентом динамичности**:

$$\mu = \frac{A}{x_{cm}} = \frac{1}{|1 - z^2|}$$

Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний превышает статическое отклонение точки. Построим график зависимости коэффициента динамичности от коэффициента расстройки  $z = p/k$ . Из графика (рис.13) следует, что при  $p \rightarrow k$  коэффициент динамичности резко возрастает, следовательно, возрастает амплитуда колебаний. При  $p \ll k$  амплитуда незначительно отличается от  $x_{cm}$ , при  $p \gg k$  амплитуда становится очень малой.

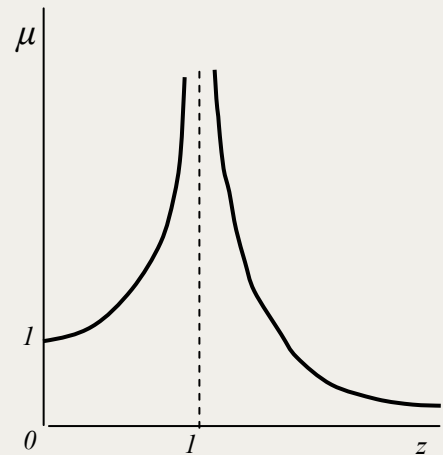


Рис. 13

### 3.3. Резонанс

Рассмотрим движение точки в том случае, когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, т.е. при  $p = k$ .

**Явление совпадения частот возмущающей силы и собственных колебаний называется резонансом.**

Дифференциальное уравнение (21) движения точки под действием восстанавливающей и возмущающей сил имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt \tag{21}$$

Частное решение этого уравнения при резонансе ( $k = p$ ) следует искать в виде:

$$x_2 = At \sin(pt + \gamma).$$

Для определения постоянных  $A$  и  $\gamma$  вычислим сначала вторую производную  $\ddot{x}_2$ .

$$\dot{x}_2 = A \sin(pt + \gamma) + Atp \cos(pt + \gamma),$$

$$\ddot{x}_2 = 2Ap \cos(pt + \gamma) - Atp^2 \sin(pt + \gamma).$$

Подставим значения  $x$  и  $\ddot{x}$  в уравнение (3.21):

$$2Ap \cos(pt + \gamma) - Atp^2 \sin(pt + \gamma) + Atk^2 \sin(pt + \gamma) = h \sin pt.$$

Здесь  $p = k$ , значит

$$2Ap \cos(pt + \gamma) = h \sin pt,$$

или

$$2Ap \cos pt \cos \gamma - 2Ap \sin pt \sin \gamma = h \sin pt.$$

Это равенство удовлетворяется тождественно, если равны коэффициенты, стоящие перед одинаковыми тригонометрическими функциями в левой и правой его частях:

$$-2Ap \sin \gamma = h, \quad 2Ap \cos \gamma = 0.$$

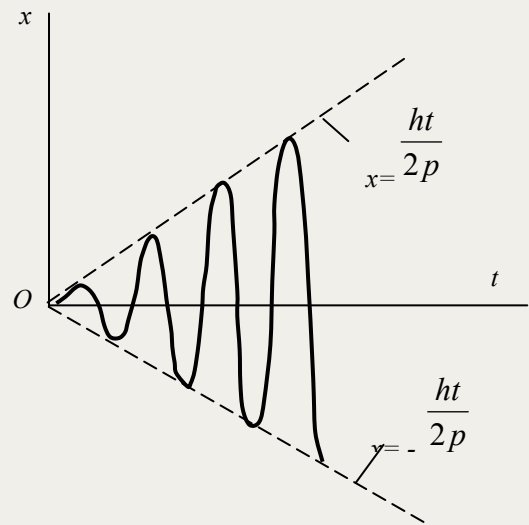


Рис.14

Отсюда, принимая, что  $A > 0$ , получаем  $A = \frac{h}{2p}$   $\gamma = -\pi/2$ .

Окончательно уравнение вынужденных колебаний при резонансе принимает вид

$$x_2 = \frac{h}{2p} t \sin\left(pt - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{h}{2p} t \cos pt.$$

Как следует из этого уравнения амплитуда вынужденных колебаний, с течением времени неограниченно возрастает, причем рост амплитуды пропорционален времени (рис.14). Частота и период вынужденных колебаний при резонансе равны частоте периода свободных гармонических колебаний, а фаза колебаний по отношению к фазе возмущающей силы отстает на  $\pi/2$ .

### 3.4. Вынужденные колебания с учетом силы сопротивления

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки, на которую действуют три силы: восстанавливающая сила, сила сопротивления, проекции которых на ось  $x$  равны  $F_x = -cx$ ,  $R_x = -\mu V_x = -\mu \frac{dx}{dt}$ , и возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону  $P_x = H \sin pt$ . Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt} + H \sin pt$$

Заменим  $\frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$ ,  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ , обозначим  $2n = \frac{\mu}{m}$ ,  $k^2 = \frac{c}{m}$ ,  $h = \frac{H}{m}$ , получим

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (33)$$

Уравнение (33) является неоднородным линейным уравнением, его решение дается формулой  $x = x_1 + x_2$ , в которой  $x_1$  – общее решение однородного дифференциального уравнения  $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$ ,  $x_2$  – частное решение уравнения (33).

При  $k > n$  общее решение однородного уравнения

$$x_1 = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) \quad (34)$$

представляет собой уравнение затухающих колебаний.

Частное решение уравнения (33) находим в форме правой части:

$$x_2 = A \sin(pt + \gamma) \quad (35)$$

Уравнение (35) является уравнением вынужденных колебаний материальной точки, происходящих с частотой возмущающей силы  $p$ . Определим амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\gamma$  вынужденных колебаний, для чего найдем первую и вторую производные от  $x_2$  по времени и подставим их значения в уравнение (33):

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= pA \cos(pt + \gamma), & \ddot{x}_2 &= -p^2 A \sin(pt + \gamma). \\ -p^2 A \sin(pt + \gamma) + 2n pA \cos(pt + \gamma) + k^2 A \sin(pt + \gamma) &= h \sin pt. \end{aligned} \quad (36)$$

Положим  $pt + \gamma = \varphi$ , тогда  $pt = \varphi - \gamma$ , следовательно,

$$\sin pt = \sin(\varphi - \gamma) = \sin \varphi \cos \gamma - \cos \varphi \sin \gamma.$$

Подставим новые переменные в уравнение (36):

$$-p^2 A \sin \varphi + 2n p A \cos \varphi + k^2 A \sin \varphi = h \sin \varphi \cos \gamma - h \cos \varphi \sin \gamma$$

или

$$A(k^2 - p^2) \sin \varphi + 2n p A \cos \varphi = h \sin \varphi \cos \gamma - h \cos \varphi \sin \gamma .$$

Приравняем коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения (36), при одинаковых тригонометрических функциях:

$$\begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= h \cos \gamma , \\ 2Anp &= -h \sin \gamma . \end{aligned}$$

Возведем в квадрат каждое из этих уравнений и сложим их:

$$A^2(k^2 - p^2)^2 + 4A^2 p^2 n^2 = h^2 .$$

Отсюда

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} . \quad (37)$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2np}{k^2 - p^2} . \quad (38)$$

Тогда

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \gamma) \quad (39)$$

Теперь общее решение  $x = x_1 + x_2$  дифференциального уравнения (3.33) можно записать в виде

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \gamma) . \quad (40)$$

Таким образом, движение материальной точки, как следует из уравнения (40), складывается из затухающих колебаний с частотой  $k_c = \sqrt{k^2 - n^2}$  и вынужденных колебаний с частотой возмущающей силы  $p$ . Первое движение со временем затухает, и основным движением остаются вынужденные колебания с частотой  $p$  и начальной фазой  $\gamma$ .

Установим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от коэффициента расстройки  $z = \frac{p}{k}$ . Разделим на  $k^2$  числитель и знаменатель формулы (3.37), определяющей значение амплитуды:

$$A = \frac{\frac{h}{k^2}}{\sqrt{(1 - \frac{p^2}{k^2}) + 4 \frac{n^2}{k^2} \frac{p^2}{k^2}}} \quad (41)$$

$h = \frac{H}{m}$ ,  $k^2 = \frac{c}{m}$ , тогда числитель выражения (41) приводится к виду:

$$\frac{h}{k^2} = \frac{H}{m k^2} = \frac{H m}{m c} = \frac{H}{c} = x_{cm}.$$

Заменим  $\frac{p}{k} = z$ ,  $\frac{h}{k^2} = x_{cm}$ ,  $\frac{n}{k} = \beta$ , тогда  $A = \frac{x_{cm}}{\sqrt{(1 - z^2) + 4\beta^2 z^2}}.$

Определим отношение амплитуды вынужденных колебаний к величине статического перемещения, которое называется **динамическим коэффициентом  $\mu$** :

$$\mu = \frac{A}{x_{cm}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{p^2}{k^2})^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \frac{p^2}{k^2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}} \quad (42)$$

Исследуем характер изменения  $\mu$  в зависимости от  $z$  при конкретном значении  $\beta$  и построим соответствующие графики (рис.15). Как следует из графика при малых значениях  $z$  ( $p \gg k$ ) величина  $\mu = 1$ , и амплитуда вынужденных колебаний практически равна статическому отклонению  $A = x_{cm}$ . При  $z = 1$  ( $p = k$ ) величина  $\mu$  имеет максимум, при этом чем меньше сопротивление, тем сильнее возрастает амплитуда.

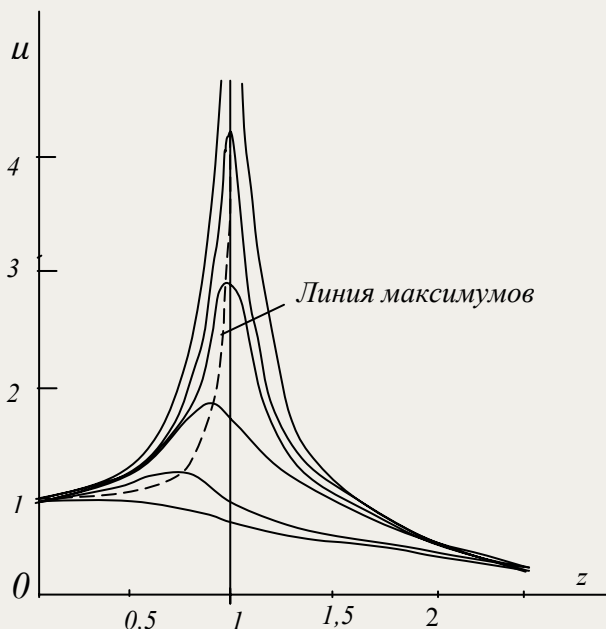


Рис. 15

Итак, движение материальной точки, на которую действуют восстанавливающая сила, сила сопротивления, пропорциональная скорости, и возмущающая сила, представляет собой наложение вынужденных колебаний на затухающие. Затухающие колебания с течением времени прекращаются. При установившемся режиме через достаточно большой промежуток времени останутся только

вынужденные колебания, определяемые уравнением

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \gamma).$$

Уравнение показывает, что вынужденные колебания материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, являются гармоническими, так как амплитуда их с течением времени не изменяется, т.е. вынужденные колебания не затухают. Этим вынужденные колебания существенно отличаются от свободных колебаний, которые затухают даже при незначительном сопротивлении. Частота и период вынужденных колебаний при наличии сопротивления равны частоте и периоду изменения возмущающей силы, т.е. сила сопротивления не влияет на частоту и период вынужденных колебаний.

### **Контрольные вопросы по теме «Колебания материальной точки»**

1. Какая сила называется восстанавливающей?
2. Записать дифференциальное уравнение движение точки под действием восстанавливающей силы.
3. Какое движение совершает точка под действием восстанавливающей силы?
4. Записать уравнение свободных гармонических колебаний.
5. Начертить график свободных гармонических колебаний.
6. Что называется амплитудой свободных гармонических колебаний?
7. Что называется начальной фазой гармонических колебаний?
8. Чему равна частота гармонических колебаний?
9. Что называется периодом гармонических колебаний?
10. Какие из перечисленных величин зависят от начальных условий: амплитуда, начальная фаза, частота, период гармонических колебаний?
11. Под действием каких сил точка совершает затухающие колебания?
12. Начертите график затухающих колебаний.
13. Записать дифференциальное уравнение затухающих колебаний.
14. Записать уравнение движения точки при затухающих колебаниях.
15. Что называется амплитудой затухающих колебаний?
16. Чему равен период затухающих колебаний?
17. Сравните период гармонических колебаний с периодом затухающих колебаний.
18. Что называется декрементом колебаний?

19. Как движется точка под действием восстанавливающей силы в случае большого сопротивления?
20. Какое движение называется апериодическим?
21. Под действием каких сил точка совершает вынужденные колебания?
22. Что называется восстанавливающей силой?
23. Записать дифференциальные уравнения вынужденных колебаний без учета сил сопротивления.
24. Записать уравнение вынужденных колебаний.
25. С какой частотой происходят вынужденные колебания точки?
26. Что называется резонансом?
27. Начертите график изменения амплитуды для вынужденных колебаний при отсутствии сил сопротивления.
28. Как влияет на резонанс сила сопротивления?
29. Что называется биениями?
30. Под действием каких сил и при каких начальных условиях возникают биения?
31. Нарисуйте график биений.