**НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ**

*Колебательное движение* точки (*колебание*) – это такое движение точки, которое повторяется во времени, соответственно повторяются значения механических величин, характеризующих данное движение. Колебательное движение называется *периодическим*, если переменные параметры этих колебаний повторяются через равные промежутки времени, в частности прохождение среднего положения (положения равновесия).

Далее везде: – масса материальной точки; – коэффициент жесткости пружины. Пружина считается невесомой. Постоянные интегрирования во *всех* задачах находятся из *начальных условий*:

Все необходимые численные расчеты проводить в пакете прикладных программ для решения задач технических вычислений MATLAB.

Для численного решения *задачи Коши* (нахождение решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям) *рекомендуется* использовать решатель ode45(). Для его использования необходимо написать функцию, определяющую правую часть дифференциального уравнения в виде системы уравнений первого порядка. Эта функция может располагаться как в самом конце скрипта решения, так и в виде отдельного m-файла (в этом случае имя m-файла должно совпадать с названием функции, а сам файл должен находится в рабочих путях MATLAB).

Например, для уравнения :

function f=my\_fun(t,y,k)

% y(1) ; y(2) ; k – передаваемый в функцию параметр

f1=y(2); % первое уравнение

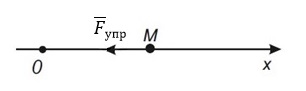
f2= – k^2\*y(1); % второе уравнение

f=[f1;f2]; % возвращаемый вектор f = [y(2); – k^2\*y(1)]

end;

**Лабораторная работа № 1.**

**Свободные колебания материальной точки**

Колебания называются *свободными*, если на точку действует только одна *восстанавливающая сила*, например, сила упругости :

Такие колебания являются *гармоническими*. Уравнение свободных колебаний:

(1)

Характеристическое уравнение и его корни:

,

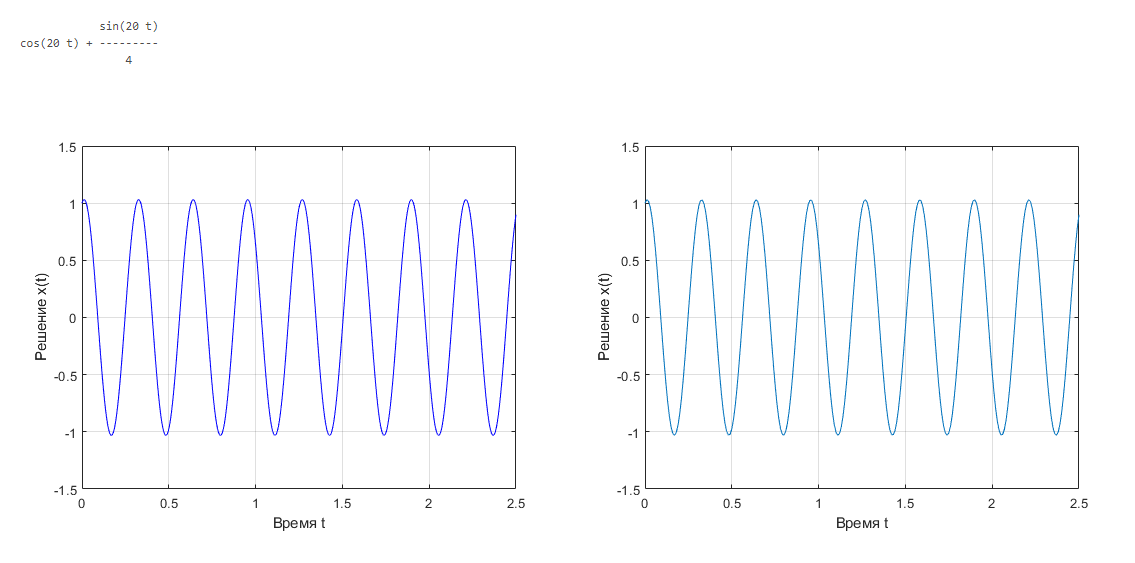
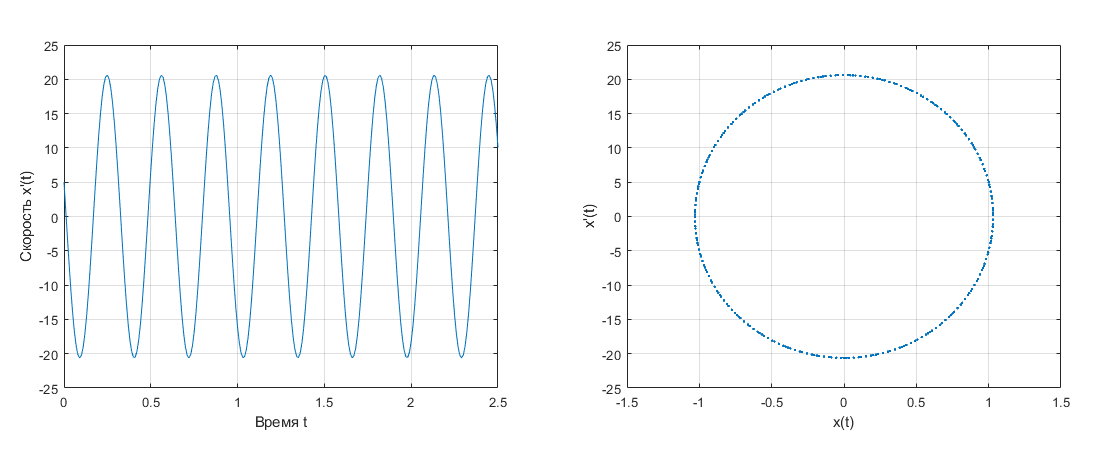
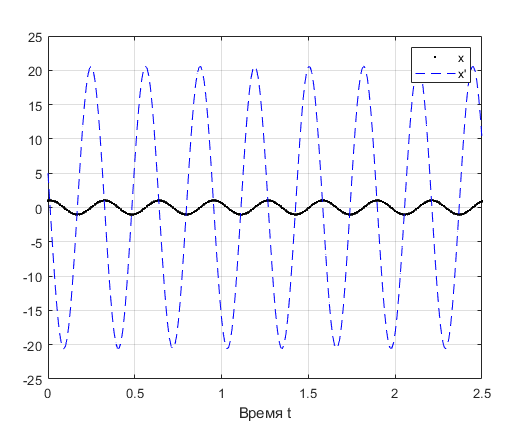
Решение уравнения (1) может быть записано в двух эквивалентных формах:

*Частота колебаний* (собственная, круговая, циклическая) ; *период колебаний* ; *амплитуда колебаний* ; *начальный сдвиг по фазе* .

|  |  |
| --- | --- |
| **Задание по лабораторной работе № 1** | Исследовать свободные колебания материальной точки |
| **Указания к выполнению работы** | 1. Ввести исходные и начальные данные  2. Получить аналитическое решение (функция dsolve)  3. Получить численное решение (функция ode45)  3. Получить численное решение (функция ode45)  4. Изобразить фазовую траекторию  5. На одном рисунке изобразить графики и |

Далее приведен пример выполнения лабораторной работы № 1.

|  |
| --- |
| Файл Free\_Harmonic\_Oscillations.m |
|  |
| Файл ode1.m |
|  |



На предыдущей странице представлены результаты, полученные с помощью пакета прикладных программ MATLAB.

Вначале приведено полученное аналитическое решение.

Далее на рисунках последовательно изображены:

– график аналитического решения ;

– график численного решения ;

– график изменения скорости ;

– фазовая кривая;

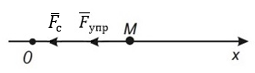
– на одном рисунке графики и .

**Вопросы для защиты лабораторной работы**

1. Какое движение материальной точки называется колебательным?
2. Какие колебания материальной точки называются свободными?
3. Что такое восстанавливающая сила?
4. Что такое собственная (круговая, циклическая) частота колебаний?
5. От каких параметров колебательной системы зависит частота колебаний?
6. В чём измеряется частота колебаний?
7. Что такое амплитуда колебаний?
8. Что называется периодом колебаний?
9. В чём измеряется период колебаний?
10. Что называется фазой колебания?
11. Что называется начальной фазой колебания?
12. В чем измеряется фаза колебания?
13. Запишите формулу, связывающую период свободных колебаний с частотой.
14. Что называется фазовой кривой?
15. Как выводится дифференциальное уравнение свободных колебаний?
16. Запишите формулу Эйлера (экспонента от комплексного числа).
17. Какое уравнение называется характеристическим?
18. Каким способом можно получить характеристическое уравнение?
19. Какие начальные условия необходимо задавать?
20. Как находятся постоянные интегрирования и ?
21. Как находятся постоянные интегрирования и ?
22. Каким образом задаются начальные условия при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
23. Каким образом задаётся дифференциальное уравнение при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
24. Какие операторы использованы для решения дифференциального уравнения при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
25. Какие операторы использованы для вывода графиков при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?

**Лабораторная работа № 2.**

**Движение материальной точки с учетом сил вязкого сопротивления**

Пусть на точку помимо восстанавливающей силы действует (*диссипативная) сила вязкого сопротивления*, пропорциональная *первой степени скорости* точки :

Уравнение движения:

(2.1)

*Коэффициент затухания* . Характеристическое уравнение и его корни:

, (2.2)

Решение уравнения (2.1) определяется знаком дискриминанта в (2.2). Возможны три различных случая.

**2.1. *Затухающие колебания*** (*случай малого трения; случай* )

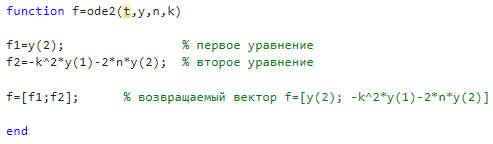
Частота колебаний (собственная, круговая, циклическая) ; период колебаний .

Амплитуды колебаний образуют *геометрическую* прогрессию с *декрементом* затухания (знаменателем прогрессии) и *логарифмическим декрементом* затухания .

**2.2. *Апериодическое движение*** (*случай большого трения; случай* )

**2.3. *Граничный случай*** (*случай кратных корней; случай* )

|  |  |
| --- | --- |
| **Задание по лабораторной работе № 2** | Движение материальной точки с учетом сил вязкого сопротивления |
| **Указания к выполнению работы** | 1. Ввести исходные и начальные данные  2. Получить аналитическое решение (функция dsolve)  3. Получить численное решение (функция ode45)  3. Получить численное решение (функция ode45)  4. Изобразить фазовую траекторию  5. На одном рисунке изобразить графики и  Выполнить пункты 1-5 для всех трёх случаев:  – Затухающие колебания (случай малого трения; случай )  – Апериодическое движение (случай большого трения; случай )  – Граничный случай (случай кратных корней; случай ) |

Пример задания уравнения (2.1):

**Вопросы для защиты лабораторной работы**

1. Что такое сила вязкого сопротивления?
2. Что такое собственная (круговая, циклическая) частота колебаний?
3. Что такое амплитуда колебаний?
4. Что называется периодом колебаний?
5. Как выводится дифференциальное уравнение движения материальной точки с учетом сил вязкого сопротивления?
6. Запишите формулу Эйлера (экспонента от комплексного числа).
7. Какое уравнение называется характеристическим?
8. Каким способом можно получить характеристическое уравнение?
9. Какие начальные условия необходимо задавать?
10. Какое движение будет в случае затухающих колебаний (случай малого трения; случай )?
11. Как находятся постоянные интегрирования в случае затухающих колебаний?
12. Как частота затухающих колебаний соотносится с частотой свободных колебаний?
13. Как период затухающих колебаний соотносится с периодом свободных колебаний?
14. Какая величина называется декрементом затухания?
15. В чём заключается механический смысл декремента затухания?
16. Какая величина называется логарифмическим декрементом затухания?
17. В чём заключается механический смысл логарифмического декремента затухания?
18. Что такое апериодическое движение (случай большого трения; случай )?
19. Как находятся постоянные интегрирования в случае апериодического движения?
20. Какое движение будет в граничном случае (случай кратных корней; случай )?
21. Как находятся постоянные интегрирования в граничном случае?
22. Каким образом задаются начальные условия при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
23. Каким образом задаётся дифференциальное уравнение при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
24. Какие операторы использованы для решения дифференциального уравнения при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
25. Какие операторы использованы для вывода графиков при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?

**Лабораторная работа № 3.**

**Вынужденные колебания материальной точки без учета сил сопротивления**

Пусть на точку помимо восстанавливающей силы действует *вынуждающая* сила :

Уравнение движения:

, (3.1)

Решение уравнения (3.1) разыскивается в виде:

Здесь – *все* множество решений однородного уравнения:

имеющее вид:

– это любое *частное* решение (одно из возможных) неоднородного уравнения:

(3.2)

**3.1. *Случай***

В этом случае частное решение разыскивается в виде *правой части* уравнения (3.2):

**3.2. *Случай***  (*биение)*

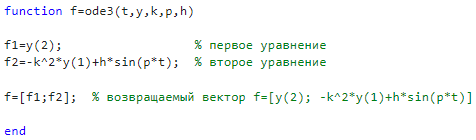
В этом случае частное решение разыскивается в виде *правой части* уравнения (3.2):

**3.3. *Случай***  (*резонанс*)

В этом случае частное решение разыскивается в виде *производной от правой части* уравнения (3.2)*, умноженной на время* :

Окончательный вид решения уравнения (3.1):

|  |  |
| --- | --- |
| **Задание по лабораторной работе № 3** | Вынужденные колебания материальной точки без учета сил сопротивления |
| **Указания к выполнению работы** | 1. Ввести исходные и начальные данные  2. Получить аналитическое решение (функция dsolve)  3. Получить численное решение (функция ode45)  3. Получить численное решение (функция ode45)  4. Изобразить фазовую траекторию  5. На одном рисунке изобразить графики и  Выполнить пункты 1-5 для всех трёх случаев:  – Случай  – Случай (биение)  – Случай (резонанс) |

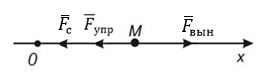
Пример задания уравнения (3.1):

**Вопросы для защиты лабораторной работы**

1. Что называется вынуждающей силой?
2. В каком виде может быть задана вынуждающая сила?
3. Что такое собственная (круговая, циклическая) частота колебаний?
4. Что такое амплитуда колебаний?
5. Что называется периодом колебаний?
6. Как выводится дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки?
7. Запишите формулу Эйлера (экспонента от комплексного числа).
8. Как разыскивается решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?
9. Как решается дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки?
10. Как можно получить характеристическое уравнение однородного уравнения?
11. Как следует искать решение однородного уравнения?
12. Как следует искать частное решение неоднородного уравнения в случае ?
13. Какое движение будет в случае?
14. Что называется биением?
15. Какое движение будет в случае биения?
16. Что называется резонансом?
17. Как следует искать частное решение неоднородного уравнения в случае резонанса?
18. Какое движение будет в случае резонанса?
19. Приведите примеры положительного (отрицательного) действия резонанса.
20. Какие начальные условия необходимо задавать?
21. Как находятся постоянные интегрирования и ?
22. Каким образом задаются начальные условия при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
23. Каким образом задаётся дифференциальное уравнение при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
24. Какие операторы использованы для решения дифференциального уравнения при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
25. Какие операторы использованы для вывода графиков при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?

**Лабораторная работа № 4.**

**Вынужденные колебания материальной точки с учетом сил вязкого сопротивления**

Пусть на точку действуют: восстанавливающая сила, вынуждающая сила, сила вязкого сопротивления:

Уравнение движения:

(4.1)

Решение уравнения (4.1) разыскивается в виде:

Здесь – *все* множество решений однородного уравнения:

имеющее вид, например, в случае затухающих колебаний (случай малого трения; случай ):

В случаях и решение однородного уравнения надо разыскивать в соответствующем виде.

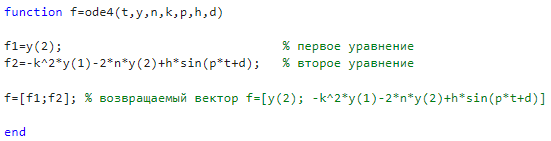
– это любое *частное* решение (одно из возможных) неоднородного уравнения:

разыскиваемое в виде:

В этом случае окончательный вид решения уравнения (4):

При выполнении неравенства резонанс (ограниченный по амплитуде) наступит при следующем соотношении частот:

|  |  |
| --- | --- |
| **Задание по лабораторной работе № 4** | Вынужденные колебания материальной точки с учетом сил вязкого сопротивления |
| **Указания к выполнению работы** | 1. Ввести исходные и начальные данные  2. Получить аналитическое решение (функция dsolve)  3. Получить численное решение (функция ode45)  3. Получить численное решение (функция ode45)  4. Изобразить фазовую траекторию  5. На одном рисунке изобразить графики и |

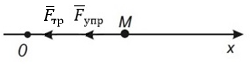
Пример задания уравнения (4.1):

**Вопросы для защиты лабораторной работы**

1. Что называется вынуждающей силой?
2. В каком виде может быть задана вынуждающая сила?
3. Что называется силой вязкого сопротивления?
4. Что такое собственная (круговая, циклическая) частота колебаний?
5. Что такое амплитуда колебаний?
6. Что называется периодом колебаний?
7. Как выводится дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки с учетом сил вязкого сопротивления?
8. Запишите формулу Эйлера (экспонента от комплексного числа).
9. Как разыскивается решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?
10. Как решается дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки с учетом сил вязкого сопротивления?
11. Как можно получить характеристическое уравнение однородного уравнения?
12. В каком виде находится частное решение неоднородного уравнения вынужденных колебаний материальной точки с учетом сил вязкого сопротивления?
13. Какие начальные условия необходимо задавать?
14. Как находятся постоянные интегрирования и ?
15. Из каких трёх групп слагаемых состоит решение уравнения вынужденных колебаний материальной точки с учетом сил вязкого сопротивления?
16. Что называется резонансом? Какое движение будет в этом случае?
17. Что называется коэффициентом расстройки?
18. Что называется коэффициентом динамичности?
19. Как амплитуда резонанса зависит от коэффициента расстройки?
20. Как коэффициент динамичности зависит от коэффициента расстройки?
21. Как сдвиг по фазе зависит от коэффициента расстройки?
22. В чём заключается отличие резонанса в случае отсутствия сил вязкого сопротивления от случая наличия сил вязкого сопротивления?
23. Каким образом задаётся дифференциальное уравнение при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
24. Какие операторы использованы для решения дифференциального уравнения при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
25. Какие операторы использованы для вывода графиков при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?

**Лабораторная работа № 5.**

**Колебания материальной точки с учетом сил сухого трения**

Пусть на точку действуют: восстанавливающая сила и сила *сухого трения* (кулоновское трение скольжения) :

Уравнение движения:

(5)

Решение уравнения (5) разыскивается в виде:

Здесь – *все* множество решений однородного уравнения:

имеющее вид:

– это любое *частное* решение (одно из возможных) неоднородного уравнения:

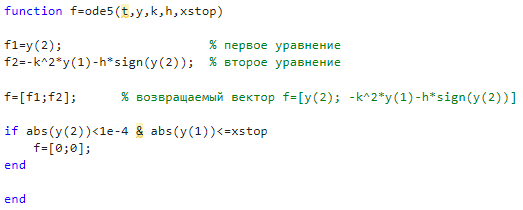
при движении точки справа налево;

при движении точки слева направо.

В обоих случаях частное решение разыскивается в виде .

Период колебаний . Амплитуды колебаний образуют убывающую *арифметическую* прогрессию с шагом . После того как точка попадает в *зону застоя*, колебания прекращаются. Такие колебания называются *останавливающимися*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Задание по лабораторной работе № 5** | Колебания материальной точки с учетом сил сухого трения |
| **Указания к выполнению работы** | 1. Ввести исходные и начальные данные  2. Получить аналитическое решение (функция dsolve)  3. Получить численное решение (функция ode45)  3. Получить численное решение (функция ode45)  4. Изобразить фазовую траекторию  5. На одном рисунке изобразить и |

Пример задания уравнения (5):

**Вопросы для защиты лабораторной работы**

1. Что называется силой сухого трения?
2. Сформулируйте закон Кулона о силе трения.
3. В чём заключается отличие силы трения покоя от силы трения движения? В какую сторону направлены эти силы?
4. Что такое собственная (круговая, циклическая) частота колебаний?
5. Что такое амплитуда колебаний?
6. Что называется периодом колебаний?
7. Как частота колебаний материальной точки с учетом сил сухого трения соотносится с частотой колебаний материальной точки в случае отсутствия сил сухого трения?
8. Как период колебаний материальной точки с учетом сил сухого трения соотносится с периодом колебаний материальной точки в случае отсутствия сил сухого трения?
9. При каких условиях начнутся колебания материальной точки с учетом сил сухого трения?
10. При каких условиях закончатся колебания материальной точки с учетом сил сухого трения?
11. Почему колебания материальной точки с учетом сил сухого трения называются останавливающимися?
12. Как выводится дифференциальное уравнение колебаний материальной точки с учетом сил сухого трения?
13. Запишите формулу Эйлера (экспонента от комплексного числа).
14. Как решается дифференциальное уравнение колебаний материальной точки с учетом сил сухого трения?
15. В каком виде находится частное решение неоднородного уравнения колебаний материальной точки с учетом сил сухого трения?
16. Как можно получить характеристическое уравнение однородного уравнения?
17. Какие необходимо задавать начальные условия?
18. Как находятся постоянные интегрирования и ?
19. Каким алгебраическим законом связаны между собой амплитуды последовательных колебаний материальной точки в случае учёта сил сухого трения?
20. Что называется зоной остановки? Что произойдет с точкой при попадании в эту зону?
21. Каким образом задаются начальные условия при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
22. Каким образом задаётся дифференциальное уравнение при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
23. Каким образом задаётся зона остановки при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
24. Какие операторы использованы для решения дифференциального уравнения при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?
25. Какие операторы использованы для вывода графиков при выполнении лабораторной работы в системе MATLAB?

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Матросов А.А., Соловьев А.Н., Серебряная И.А. и др. Колебания механических систем. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2020. – 105 с.

2. Матросов А.А., Соловьев А.Н., Серебряная И.А. и др. Колебания механических систем. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2020. – 105 с.

3. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

4. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – СПб: Лань, 2022. – 732 с.

5. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 1. – СПб.: Лань, 2021. – 448 с.

6. Лойцянский Л.Г, Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Дрофа, 2006. – 719 с.

7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 2002. – 764 с.